

ZWEIDIMENSIONALE SPLINES AUF REGULÄREN
TRIANGULATIONEN

LOTHAR BAMBERGER

*Class
München
1985*





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554004_0021

ZWEIDIMENSIONALE SPLINES AUF
REGULÄREN TRIANGULATIONEN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
LOTHAR BAMBERGER
aus München

eingereicht am 22.5.1985

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Richert

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1985

INHALT

Einleitung und Inhaltsübersicht	1
Kapitel 1: Grundlagen der Splines in mehreren Veränderlichen	6
1.1 Splineräume auf Triangulationen	6
1.2 Polyedrische Splines	9
1.3 Splines in einer Dimension	19
1.4 Boxsplines	24
Kapitel 2: Splines in zwei Dimensionen auf regulären Triangulationen	31
2.1 Dimension von Splineräumen	31
2.2 Erzeugendensysteme von Splineräumen	32
2.3 Approximation in Splineräumen	36
2.4 Spezielle Splineräume auf der Triangulation vom Typ 1	46
2.5 Spezielle Splineräume auf der Triangulation vom Typ 2	50
Kapitel 3: Basen von Splineräumen	59
3.1 Eine Basis von $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta_{N,N}^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	59
3.2 Eine Basis von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,N}^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	62
3.3 Eine Basis von $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta_{N,N}^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$	68
3.4 Eine Basis von $S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,N}^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$	71
Kapitel 4: Approximation in Splineräumen	82
4.1 Beispiel zur lokalen Approximation	83
4.2 Approximation mit $B_{2,1}$ und $B_{1,2}$	87
4.3 Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$	95
4.4 Approximation mit $B_{r+1,r}$ und $B_{r,r+1}$	97

4.5	Approximationsordnung von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	101
4.6	Approximationsordnung von $S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	102
4.7	Approximationsordnung von $S_{2\mu+2}^{\mu}(\Delta^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	105
4.8	Approximationsordnung von $S_{2\mu+1}^{\mu}(\Delta^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$	109
4.9	Approximationsordnung von $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$	111
4.10	Approximationsordnung von $S_{4r}^{3r-1}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$	112
4.11	Approximationsordnung von $S_{4r-1}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$	119
Kapitel 5: Interpolation in Splineräumen		122
5.1	Bézierpolynome in einer Dimension	122
5.2	Bézierpolynome über Dreiecken	124
5.3	Interpolation in $S_3^1(\Delta^{(1)})$	126
5.4	Numerische Ergebnisse	132
Literatur		135

BezeichnungenSeite

Δ	Zerlegung eines Gebiets	7
$S_k^\mu(\Delta)$	Spliner Raum zur Zerlegung Δ , k Grad, μ Glattheit	7
$\mathbb{P}_k$	Polynome vom Gesamtgrad $\leq k$	7
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen	7
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	7
$\mathbb{Z}$	$\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ganze Zahlen	7
$ \alpha_1, \dots, \alpha_m $	$= \alpha_1 + \dots + \alpha_m$	7
$(z_1, \dots, z_m)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$	$= z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m}$	7
$\Delta_{N, \tilde{N}}^{(0)}$		7
$\Delta_{N, \tilde{N}}^{(1)}$	Triangulation vom Typ 1	8
$\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)}$	Triangulation vom Typ 2	8
$S_k^\mu(\Delta_{N, N}^{(v)})$	$v = 0, 1, 2$	9
M_Q	simplizialer Spline zum konvexen Polyeder $Q \subset \mathbb{R}^n$	9
$\text{supp } f$	Träger der Funktion bzw. Distribution f	
$C^\infty(\mathbb{R}^m)$	$:= \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ beliebig oft differen-}$ $\text{zierbar}\}$	9
$C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$	$:= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : \text{supp } f \text{ kompakt}\}$	9
$L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^m)$	lokal integrierbare Funktionen	10
$\text{Im } P$	$:= \{Px : x \in \mathbb{R}^n\}$ Bild von $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	10
$\mathbb{R}_+^n$	$:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$	11
$e_i^{(n)}$	$:= (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$	11
e_1	$= (1, 0), e_2 = (0, 1)$	11

$$\text{con}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i : n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ für } i=1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, z_1, \dots, z_n \in A \right\}$$

konvexe Hülle von A. A ist Teilmenge eines linearen Raumes

11

$C_E, C_{r,s,t}, C_{r,s,t,v}$ Conespline

11

$D_z f$ Richtungsableitung von f bzgl. z

12

$B_E, B_{r,s,t,v}, B_{r,s,t}, B_{r,s}$ Boxspline

13

$\tau_z f := f(\cdot - z)$ Translation

14

$$\Delta_z := f(\cdot + z) - f(z), \nabla_z f = f - f(\cdot - z) = (1 - \tau_z)f = (\tau_0 - \tau_z)f \quad \text{für } z \in \mathbb{R}^m$$

$$\Delta_z := \Delta_z^1 \dots \Delta_z^l, \nabla_z := \nabla_z^1 \dots \nabla_z^l \quad \text{für } z = (z^1, \dots, z^l) \in \mathbb{R}^m$$

14

$D_{r,s,t,v}, D_{r,s,t}, D_{r,s}$

15

$\nabla_{r,s,t,v}, \nabla_{r,s,t}, \nabla_{r,s}$

15

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

charakteristische Funktion von $A \subset \mathbb{R}^m$

15

δ Deltadistribution, d.h. für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ ist $\delta\varphi = \varphi(0)$

15

$$L(E) := \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i z^i : \beta_i \in \mathbb{Z}, i=1, \dots, n \right\} \quad \text{für } E = (z^1, \dots, z^n) \subset \mathbb{Z}^m$$

17

$c_E : L(E) \rightarrow \mathbb{R}$ diskreter Conespline

17

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)dy \quad \text{Faltung von } f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

18

$(f * g)\varphi := f_x g_y \varphi(x+y) \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$	
Faltung der Distributionen f und g (f_x Distribution bzgl. der Variablen x , g_y bzgl. y)	18
diskrete Faltung $*$	19
x_+	19
$\text{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i : n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, z_i \in A, i=1, \dots, n \right\}$. A ist eine Teilmenge eines Vektorraums über $\mathbb{R}$.	24
$S(\mathbb{E}) := \text{span}(\tau_1 B_{\mathbb{E}}, l \in \mathbb{Z}^m)$	25
$\mathbb{IP} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{IP}_k$	25
$\mathcal{D}(\mathbb{E}), \mathcal{D}(r,s,t,v), \mathcal{D}(r,s,t)$	25
$d(\mathbb{E})$	26
$ A $ Anzahl der Elemente einer Menge bzw. eines Systems A	26
$\deg q$ Grad des Polynoms q	30
$n(1) := \frac{1}{2}(1+1)(1+2) \quad \text{falls } 1 \geq -1,$	
$n(1) := 0 \quad \text{falls } 1 < -1$	32
$[x] := \max\{v \in \mathbb{Z} : v \leq x\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$	32
$d(3), d(4)$	32
$T_{i,1,r}, i=1,2,3$ abgeschnittene Potenzfunktionen	33
$\mu(1) := \left\lfloor \frac{21-2}{3} \right\rfloor \quad \text{für } \Delta^{(1)}$	34
maximale Glattheit	34
$T_{4,1,r}$	35
$d(2)$	36
$\mu(k) := \left\lfloor \frac{3k-2}{3} \right\rfloor \quad \text{für } \Delta^{(2)}$	36
$I := [0,1]$	37
$S_h := \{s(\frac{\cdot}{h}) _{I \times I} : s \in S\}$	37

$\ f\ _A := \sup_{x \in A} f(x) $ mit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$	37
$\text{dist}(f, S_h) := \inf_{s \in S_h} \ f-s\ _{I \times I}$ mit $f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$	37
$(1-\tau_z)$ Differenzenoperator, $z \in \mathbb{R}^2$. Es ist $(1-\tau_z)f = f - f(\cdot - z)$	38
$S_h(\phi)$	39
$L_p(\mathbb{R}^m)$, $\ f\ _p$, $\ f\ _{j,p}$, $\ f\ _{1,p}$, $W_p^1(\mathbb{R}^m)$, $W_{p,c}^1$	39
$\hat{f}$ Fouriertransformierte	39
$\rho(z) := \frac{1-e^{-iz}}{iz}$, $z \in \mathbb{R}$	41
$m_1(k, \mu)$, $m_2(k, \mu)$	43
$\otimes$ Tensorprodukt	46
minimaler Träger	47
χ_1 , χ_2	48
$B^\vee := \chi_\vee * B_{r,r,r}$ in Abschnitt 2.4 und 3.2	48
η_1 , η_2	53
$B^\vee := \eta_\vee * B_{r,r,r,r}$ in Abschnitt 2.5 und 3.4	53
$S_1^{-1,0,0}(\Delta_{N,N}^{(1)})$	86

Einleitung und Inhaltsübersicht

Die heute als Splines bekannten Funktionen wurden zuerst von Schoenberg zur Lösung eines Interpolationsproblems benutzt (Quart. Appl. Math. 4, 45-99, 112-141 (1946)). Diese sind in einer Dimension auf jedem Teilintervall einer Zerlegung Polynome eines vorgegebenen Höchstgrades und erfüllen über dessen Endpunkte bestimmte Glattheitsforderungen. Erst nach 1960 begann ein intensives Studium dieser Funktionen. Ihre Theorie ist in einer Dimension im wesentlichen abgeschlossen [13,127]. Eine wichtige Rolle spielen dabei B-Splines, die einen kompakten Träger haben und eine Basis des Splineraums bilden. B-Splines erweisen sich vor allem bei der Approximation von Funktionen als nützlich. Ferner können Splines bei der numerischen Integration und der numerischen Lösung von Operatorgleichungen benutzt werden. Viele Operatorgleichungen treten jedoch in mehreren Dimensionen auf. Tensorprodukte und Blending-Splines stellen eine Erweiterung eindimensionaler Methoden dar, sind jedoch nur für Rechtecke mit einem geeigneten Datensatz anwendbar. Seit einigen Jahren stehen deshalb Splines auf allgemeineren Zerlegungen in mehreren Dimensionen im Blickpunkt des Interesses. Für eine Übersicht siehe [57]. Nur bei finiten Elementen mit einer relativ niedrigen Glattheit waren Ergebnisse bekannt (siehe z.B. G. Strang, G.J. Fix: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1973)).

In dieser Arbeit sollen bisher noch ungeklärte Probleme von Splines in zwei Dimensionen behandelt werden. Für ein beschränktes Gebiet Ω im $\mathbb{R}^2$ sei Δ eine Triangulation, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu < k$. Mit

$$S_k^\mu(\Delta)$$

bezeichnen wir den Raum aller μ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω , deren Einschränkung auf jedes Dreieck von Δ ein Polynom ist, dessen Gesamtgrad nicht größer

als k ist. Für diese linearen Räume sollen wichtige Eigenschaften geklärt werden. Dazu gehören

1. Dimension
2. Erzeugendensysteme und Basen
3. Approximationseigenschaften.

Ferner sind praktische Approximationsmethoden, zu denen die Interpolation zählt, von Interesse. Es zeigt sich, daß sich schon bei einer einfachen Triangulation Δ Probleme ergeben, $\dim S_k^\mu(\Delta)$ anzugeben (siehe [114] für ein Beispiel mit $S_2^1(\Delta)$). Daher werden zunächst nur reguläre Triangulationen betrachtet, insbesondere

$\Delta^{(1)}$: Quadrate gleicher Größe mit einer Diagonalen,

$\Delta^{(2)}$: Quadrate gleicher Größe mit zwei Diagonalen.

Für diese Zerlegungen ist $\dim S_k^\mu(\Delta)$ bekannt [43]. de Boor und Höllig haben in [21] Erzeugendensysteme angegeben, und Chui und Wang haben für $S_4^2(\Delta^{(1)})$, $S_3^1(\Delta^{(1)})$ und $S_2^1(\Delta^{(2)})$ Basen gefunden [42,44]. Ihre Ergebnisse werden in Kapitel 3 auf ganze Splineklassen verallgemeinert. Bereits für recht einfache Zerlegungen wie $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ ergeben sich interessante Eigenschaften bei der Approximation glatter Funktionen [17]. Kapitel 4 bringt neue Ergebnisse über Approximationsordnungen. Bislang waren nur bei finiten Elementen mit einem im Vergleich zur Glattheit relativ hohen Grad Interpolationsverfahren bekannt. Kapitel 5 beschreibt eine Methode in $S_3^1(\Delta^{(1)})$.

Im folgenden soll der Inhalt der einzelnen Kapitel näher präzisiert werden.

Kapitel 1 bringt eine Einführung in die Grundlagen der mehrdimensionalen Splines. Es werden Boxsplines, die eine Verallgemeinerung der eindimensionalen B-Splines auf regulären Gittern sind und kompakten Träger haben, und Conesplines definiert, deren Träger Kegel sind. Analog können diskrete Conesplines eingeführt werden, die auf einer diskreten Menge definiert sind. Abschnitt 1.3 beschreibt wichtige eindimensionale Resultate. Die Marsdensche Iden-

tität gibt die Polynome als Linearkombination der B-Splines an. Für sie wird eine neue Interpretation mit diskreten Conesplines gegeben. Außerdem wird eine Auflösung von höheren Differenzen gezeigt, die bei Approximationsproblemen von Bedeutung sein wird. In Abschnitt 1.4 werden auf neue Weise die Abhängigkeiten von Boxsplines auf $\Delta^{(2)}$ hergeleitet. Dieses Ergebnis wird vor allem bei der Untersuchung von Basen in Kapitel 3 von Bedeutung sein.

Kapitel 2 faßt wichtige Resultate über Splines auf $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ zusammen. Zuerst werden die bekannten Aussagen von Chui und Wang über die Dimension [43] und von de Boor und Höllig über Erzeugendensysteme [21] angegeben. Danach kann man die Splineräume in verschiedene Klassen einteilen. Boxsplines spielen dabei eine entscheidende Rolle. In Abschnitt 2.3 werden Ergebnisse über die Approximation dargestellt. Die Bestimmung der Approximationsordnung von $S_k^\mu(\Delta^{(\nu)})$, $\nu=1,2$ erweist sich als sehr kompliziert. Zunächst stellt sich heraus, daß nur die Boxsplines entscheidend für die Approximation sind. Für ein System von Funktionen mit kompakten Trägern wird die lokale Approximation eingeführt (Definition 2.3.2). Sie liefert untere Schranken für die Approximationsordnung. Bisher waren nur folgende obere Schranken bekannt:

1. $m_\nu(k, \mu)$ für $S_k^\mu(\Delta^{(\nu)})$, $\nu=1,2$ (Satz 2.3.5)

2. 3 für $S_3^1(\Delta^{(1)})$ nach de Boor und Höllig [20].

Die oberen Schranken $m_\nu(k, \mu)$ erweisen sich in vielen Fällen als nicht scharf. Daher werden in Kapitel 4 neue Methoden entwickelt, die zu oberen Schranken führen, die bis auf einen Fall mit der exakten Approximationsordnung übereinstimmen. Vorbereitend wird hier mittels der Markovschen Ungleichung gezeigt, daß eine bestimmte Konvergenzordnung bei der Approximation in Splineräumen auf regulären Triangulationen zu einer entsprechenden Konvergenzordnung der Ableitungen führt (Satz 2.3.4). Dieses Ergebnis wird in Kapitel 4 ständig verwendet. In den Abschnitten 2.4 und 2.5 werden vier spezielle Splineklassen näher untersucht. In

zwei Fällen existieren Splines mit minimalen Trägern, die von den Boxsplines verschieden sind. Es wird gezeigt, daß sie denselben Raum wie die Boxsplines aufspannen (Satz 2.4.2 und Satz 2.5.2). In einem Fall wurden sie zuerst von Frederickson [81] angegeben, im anderen sind sie neu. Beweise über die Minimalität der Träger lehnen sich an de Boor und Höllig [21] an.

Kapitel 3 liefert für spezielle Splineklassen auf einem Rechteck Zerlegungen in eine direkte Summe von Linearkombinationen von Boxsplines bzw. Splines mit minimalen Trägern und abgeschnittenen Potenzfunktionen, deren Träger Halbebenen sind. In drei Fällen kann daraus relativ einfach eine Basis erhalten werden, wobei gegebenenfalls noch linear abhängige Splines eliminiert werden. Die Ergebnisse stellen eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von Chui und Wang dar [42,44].

In Kapitel 4 werden neue obere Schranken für Approximationsordnungen in bestimmten Klassen von Splineräumen angegeben. Abschnitt 4.1 zeigt, daß die Approximationsordnung eines Systems endlich vieler Funktionen mit kompakten Trägern größer sein kann als seine lokale Approximationsordnung (in Definition 2.3.2). Daher liefern die Untersuchungen von Dahmen und Micchelli [65,67] keine Aussage über die exakte Ordnung. Es sind also neue Methoden erforderlich, obere Schranken zu gewinnen. Inzwischen wurde auch von Jia für $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$ mit $3 \leq 2k - 3\mu \leq 7$ eine obere Schranke gefunden [103]. Wir verwenden Differentialoperatoren, die auf Differenzen führen, die durch Summation aufgelöst werden können. Dies kann formal auch durch Faltung mit diskreten Conesplines ausgedrückt werden.

Kapitel 5 beschreibt ein erstes Beispiel zur Interpolation in einem Spliner Raum in zwei Veränderlichen, in dem der Grad nicht zu groß im Vergleich zur Glattheit ist. Bei der Interpolation in $S_3^1(\Delta^{(1)})$ wird die Darstellung des Splines auf jedem Dreieck als Polynom in Bézierordinaten berechnet. Die Behandlung von Splines mit Bézierpolynomen wurde zuerst von Farin [77] beschrieben. Die numerischen

Ergebnisse bestätigen die Konvergenzordnung, wie sie sich aus den Kapiteln 2 und 4 ergibt.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die Anregung und Betreuung der Arbeit. Mein Dank gilt ferner Prof. Dr. L.L. Schumaker und Prof. Dr. Ch.K. Chui von Texas A&M University für die Unterstützung während meines Aufenthalts am Center for Approximation Theory.

KAPITEL 1:

Grundlagen der Splines in mehreren Veränderlichen

In Abschnitt 1.1 werden Splines auf fest vorgegebenen Triangulationen betrachtet. Aufgrund der Schwierigkeiten, die sich bei der Untersuchung allgemeiner Zerlegungen ergeben, konzentriert sich das Interesse auf reguläre Triangulationen der Ebene. Eine abstrakte Einführung der polyedrischen Splines bringt Abschnitt 1.2. Beispiele hierfür sind Simplex-splines, Conesplines und Boxsplines, deren Eigenschaften näher untersucht werden. Mittels Faltung können neue Splines gewonnen werden. Auch diskrete Conesplines können auf ähnliche Weise definiert werden. Da auch Aussagen aus der eindimensionalen Theorie später verwendet werden, sind einige von ihnen im Abschnitt 1.3 zusammengestellt. Dazu gehören die Marsdensche Identität, für die eine neue Interpretation durch diskrete Conesplines gegeben wird, duale Basen und die Auflösung von Differenzen von Folgen. Wegen ihrer großen Bedeutung werden in Abschnitt 1.4 weitere Eigenschaften von Boxsplines, ihre lineare Abhängigkeit und die durch sie induzierten Polynome untersucht. Insbesondere wird ein neuer Beweis für alle linearen Abhängigkeiten von Boxsplines mit vier Richtungen gegeben.

1.1. Splineräume auf Triangulationen

In einer Dimension kann eine geschlossene Theorie für Splineräume angegeben werden (vgl. [13,127]), in zwei Dimensionen dagegen ist dies wegen der großen Vielfalt von Zerlegungen nicht möglich. Morgan und Scott haben in [114] (vergleiche auch [43]) ein Beispiel angegeben, in dem kleine Störungen der zugrundeliegenden Triangulation eine Änderung der Dimension des Splineräumens bewirken. Beim klassischen Zugang zu einer zweidimensionalen Spline-theorie wird eine Zerle-

gung eines Gebietes Ω in Vielecke fest vorgegeben. Zu einer solchen Zerlegung Δ definiert man dann den Splineraum

$$(1.1.1) \quad S_k^u(\Delta) := \{f \in C^u(\Omega) : f|_D \in \mathbb{P}_k$$

für alle Vielecke D der Zerlegung $\Delta\}$

mit

$$(1.1.2) \quad \mathbb{P}_k := \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} c_\alpha z^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hier wurde die übliche Multiindexschreibweise verwendet [1].

Hat der zu betrachtende Raum die Dimension m (in dieser

Arbeit $m = 1$ oder 2), so ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$,

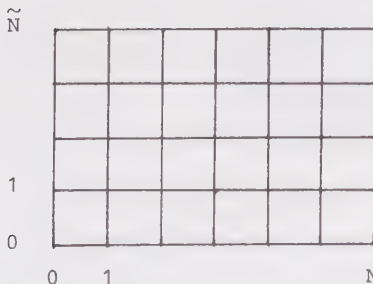
$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{und}$$

$$z^\alpha = \prod_{i=1}^m z_i^{\alpha_i}.$$

Dabei sind $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

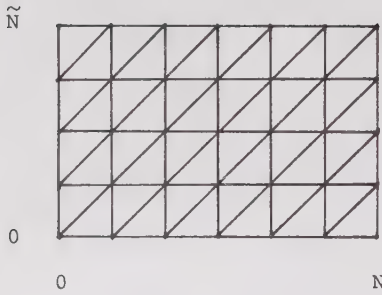
Man beachte, daß hier Polynome vom Gesamtgrad k von Interesse sind und nicht Tensorprodukte, deren Eigenschaften sich aus der eindimensionalen Theorie ableiten lassen. Da eine allgemeine Theorie für beliebige Δ nicht möglich ist, beschäftigt man sich mit speziellen Zerlegungen. Die wichtigsten Beispiele hierfür sind

$$1. \quad \Delta_{N, \tilde{N}}^{(0)}$$



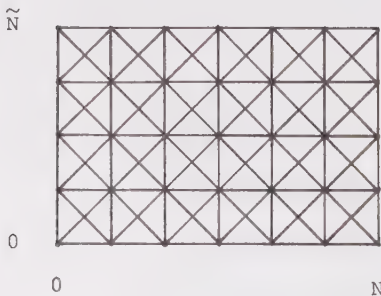
Hier wird das Gebiet $(0, N) \times (0, \tilde{N})$ in gleichgroße Quadrate der Seitenlänge 1 unterteilt.

2. $\Delta_{N, \tilde{N}}^{(1)}$



Hier werden die Diagonalen mit positiver Steigung eingezeichnet. Diese Zerlegung heißt auch Triangulation vom Typ 1.

3. $\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)}$



Hier werden auch noch die Diagonalen negativer Steigung hinzugenommen. Diese Zerlegung heißt auch Triangulation vom Typ 2.

Die entsprechenden Splineräume sind $S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(\nu)})$, $\nu = 0, 1, 2$. Denkt man sich die Zerlegungen auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt, so schreibt man $S_k^\mu(\Delta^{(\nu)})$. Man beachte, daß sich später ((2.2.2) und (2.2.8)) ergibt

$$(1.1.3) \quad S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(\nu)}) = \{ f|_{[0,N] \times [0,\tilde{N}]} : f \in S_k^\mu(\Delta^{(\nu)}) \}.$$

Eines der Hauptziele der gegenwärtigen Splinetheorie in mehreren Veränderlichen besteht darin, Eigenschaften der $S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(\nu)})$ zu beschreiben. Dabei spielen abstrakte Konstruktionen, wie sie in Abschnitt 1.2 eingeführt werden, eine wichtige Rolle.

1.2. Polyedrische Splines

Neben dem klassischen Zugang hat sich in der mehrdimensionalen Splinetheorie eine weitere Konzeption entwickelt, die es erlaubt, ganz abstrakt Funktionen zu konstruieren, die auf allen Teilgebieten ihrer Zerlegung Polynome sind. Dabei kann die Zerlegung nicht frei gewählt werden, sondern ist durch die Konstruktion fest vorgegeben. Wir wollen sie kurz beschreiben und dann einige Spezialfälle herausgreifen, die für unsere weiteren Untersuchungen von Bedeutung sind. Zunächst gibt man sich eine Projektion

$$(1.2.1) \quad P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

vor. Dabei ist $m \in \mathbb{N}$ die Dimension des zugrundegelegten Raumes (später nur 1 oder 2). $n \in \mathbb{N}$ ist beliebig. Nun wählt man noch ein konvexes Polyeder $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Durch

$$(1.2.2) \quad M_Q \varphi := \int_Q \varphi(P\lambda) d\lambda,$$

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : \text{supp } \varphi \text{ kompakt} \}$$

(supp f sei der Träger der Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$)

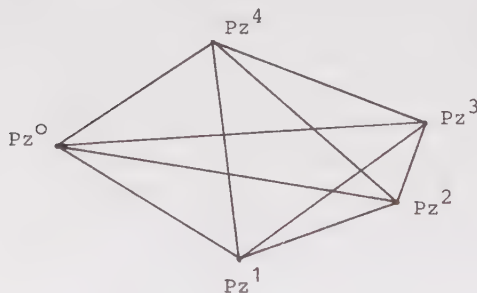
kann unter gewissen Bedingungen an Q eine Distribution definiert werden. Ist Q kompakt, so ist (1.2.2) stets

wohldefiniert. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes lassen sich für M_Q Formeln für Ableitungen und eine Rekursionsrelation herleiten [18, Theorem 2, 19, Theorem 1].

Es kann gezeigt werden, daß M_Q genau dann eine reguläre Distribution ist (d.h. $\exists f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$):

$M_Q f = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, wenn P surjektiv ist (also $J_m P = \mathbb{R}^m$). In diesem Fall machen wir keinen Unterschied zwischen der Distribution M_Q und der sie induzierenden Funktion. Wir geben nun drei wichtige Beispiele für polyedrische Splines an.

- a. Q sei ein Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit den Ecken $z^0, \dots, z^n \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten einen Simplexspline (oder einfach einen mehrdimensionalen B-Spline). Diese Splines sind bisher gründlich untersucht worden. Siehe z.B. [18, 28, 29, 50, 51, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 87, 88, 92, 93, 96, 97, 110, 111].



Dies ist ein Beispiel für einen Simplexspline mit $n=4$, $m=2$. Die Punkte $Pz^0, \dots, Pz^4$ sind die sogenannten Knoten des Splines. Die Kanten des Simplex im $\mathbb{R}^4$ werden durch P auf die Gitterlinien im $\mathbb{R}^2$ abgebildet. Deshalb ist jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Gitterlinie verbunden, weshalb die Zerlegung kompliziert wird. Wir erhalten eine große Anzahl von Vielecken, auf denen der Spline durch verschiedene Polynome dargestellt wird. Der Grad des angege-

benen Splines ist $n-m = 2$. Wegen ihrer komplizierten Gitterkonfigurationen werden Simplexsplines in dieser Arbeit keine Rolle spielen.

- b. Ist $Q = \mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, so erhält man Conesplines (bei Dahmen/Micchelli: truncated powers). Sie wurden bisher untersucht in [19, 21, 43, 51, 53, 57].

Sei $e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$. M_Q ist nur dann wohldefiniert, wenn $0 \notin \text{con} (Pe_1^{(n)}, \dots, Pe_n^{(n)})$ ($\text{con} =$ konvexe Hülle). Dies sei in diesem Zusammenhang stets erfüllt. Es sei $E := (Pe_1^{(n)}, \dots, Pe_n^{(n)})$. Dann schreibt man für den dadurch definierten Conespline kurz C_E . Man beachte, daß P durch die Angabe von E eindeutig festgelegt ist. Es kommt offenbar nicht auf die Reihenfolge der Elemente in E an. Auch können gleiche Vektoren mehrmals in E auftreten. Ferner wollen wir $E \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ voraussetzen. Es sei $m = 2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ und $E = (e_1 : r, e_2 : s, e_1 + e_2 : t)$.

$r, s, t \in \mathbb{N}_0$ geben die Vielfachheiten der jeweiligen Richtungen an. Anstelle von C_E schreiben wir kurz $C_{r,s,t}$.



Der Träger von $C_{r,s,t}$ ist $\mathbb{R}_+^2$ und $\mathbb{R}_+e_1$, $\mathbb{R}_+e_2$, $\mathbb{R}_+(e_1 + e_2)$ sind seine Gitterlinien. Daher ist $C_{r,s,t}$ ein Spline auf $\Delta^{(1)}$ und demnach von größerem Interesse. Entsprechend schreibt man im Fall $E = (e_1 : r, e_2 : s, e_1 + e_2 : t, e_1 - e_2 : v)$ $C_{r,s,t,v}$.



Der Träger ist

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x+y \geq 0\}.$$

$C_{r,s,t,v}$ ist ein Spline auf $\Delta^{(2)}$.

Es ist $C_{r,s,t,0} = C_{r,s,t}$,

$$C_{r,s} := C_{r,s,0} = C_{r,s,0,0}.$$

Wir wollen mit der ersten Richtung e_1 , der zweiten e_2 , der dritten $e_1 + e_2$ und der vierten $e_1 - e_2$ assoziieren.

Wir treffen nun einige Vereinbarungen bezüglich Richtungsableitungen. Für $z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^m$ sei

$$D_z f(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + tz) \right|_{t=0}$$

die Ableitung von f in Richtung z . Diese kann auch im distributionellen Sinne verstanden werden. Ist

$Z = (z^1, \dots, z^1) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, so schreiben wir

$$D_Z f := D_{z^1} \dots D_{z^1} f.$$

Nach [21] ist die Ableitung von Conesplines besonders einfach. Sei $Z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann ist

$$(1.2.3) \quad D_Z C_E = C_{E \setminus Z}.$$

Hieraus kann man leicht die Differenzierbarkeitseigenschaften von $C_{r,s,t}$ ableiten. Beachtet man, daß $C_{r,0,0}$, $C_{0,s,0}$ und $C_{0,0,t}$ nichtreguläre Distributionen sind, so folgt aus (1.2.3):

(1.2.4) Alle Ableitungen der Ordnung

$$\left\{ \begin{array}{l} s+t-2 \\ r+t-2 \\ r+s-2 \end{array} \right\} \quad \text{sind über} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ e_1 \\ \mathbb{R}_+ e_2 \\ \mathbb{R}_+ (e_1 + e_2) \end{array} \right\} \quad \text{stetig}.$$

Mit

$$(1.2.5) \quad d := (r + s + t - \max(r, s, t)) - 1$$

gilt also

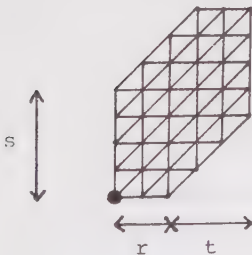
$$(1.2.6) \quad C_{r,s,t} \in C^{d-1}(\mathbb{R}^2) .$$

Aus (1.2.3) läßt sich ferner ableiten, daß $C_{r,s,t}$ auf jedem Teilgebiet der Zerlegung ein Polynom des Grades $r + s + t - 2$ ist.

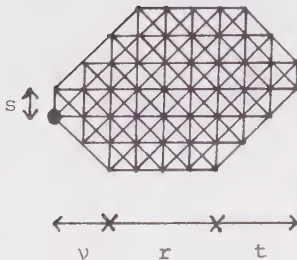
c. Falls $Q = [0,1]^n$ ist, nennt man M_Q einen Boxspline. Er wird der wichtigste Splinetyp dieser Arbeit sein. Wie beim Conespline schreibt man für den Boxspline B_{Ξ} , falls $\Xi = (Pe_1^{(n)}, \dots, Pe_n^{(n)})$ ist. Ist $m = 2$ und

$\Xi = (e_1 : r, e_2 : s, e_1 + e_2 : t, e_1 - e_2 : v)$, so ist $B_{r,s,t} := B_{\Xi}$. Zur Vereinfachung vereinbaren wir

$$B_{r,s,t,0} = B_{r,s,t}, \quad B_{r,s,0,0} = B_{r,s} .$$



Der Träger von $B_{r,s,t}$ besteht aus jeweils r, s bzw. t Abschnitten in der ersten, zweiten bzw. dritten Richtung.



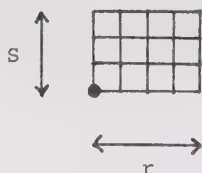
Träger von $B_{r,s,t,v}$.

● Nullpunkt.

Diese Splines sind auf $\Delta^{(1)}$ bzw. $\Delta^{(2)}$ definiert. Viele Arbeiten beschäftigen sich eingehend mit Boxsplines [15,19, 21,57,64,66,67,68,69,70,99,101,110,111] .

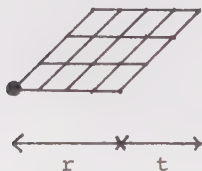
Ist in einer Dimension $\Xi = (1:r)$, so ist $B_r := B_\Xi$ der gewöhnliche B-Spline der Ordnung r (Grad $r-1$) mit den Knoten $0,1,\dots,r$ und dem Träger $[0,r]$.

In zwei Dimensionen ist $B_{r,s}(x,y) = B_r(x)B_s(y)$ der Tensorprodukt-B-Spline.



Träger von $B_{r,s}$

Ferner ist $B_{r,0,t}(x,y) = B_r(x-y)B_t(y)$.



Träger von $B_{r,0,t}$

Für Boxsplines lassen sich ähnlich wie für Conesplines einfache Formeln für die Ableitung angeben. Zunächst führen wir weitere Notationen ein. Es sei $z \in \mathbb{R}^m$. Für eine Distribution oder Funktion f auf $\mathbb{R}^m$ sei

$$\tau_z f := f(\cdot - z) .$$

Ferner sei

$$\Delta_z f := f(\cdot + z) - f, \quad \nabla_z f := f - f(\cdot - z) .$$

Für $Z = (z^1, \dots, z^l) \in \mathbb{R}^m$ sei

$$\Delta_Z := \Delta_{z^1} \dots \Delta_{z^l}, \quad \nabla_Z := \nabla_{z^1} \dots \nabla_{z^l} .$$

Im Fall $m = 2$ und $z = (e^1 : r, e^2 : s, e^1 + e^2 = t, e^1 - e^2 : v)$ schreiben wir

$$\begin{aligned} D_{r,s,t,v} &:= D_Z, \quad \nabla_{r,s,t,v} := \nabla_Z, \quad D_{r,s,t} := D_{r,s,t,o}, \\ \nabla_{r,s,t} &:= \nabla_{r,s,t,o}, \quad D_{r,s} := D_{r,s,o}, \quad \nabla_{r,s} := \nabla_{r,s,o}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß für $z \in \mathbb{Z}^m$ τ_z und $\nabla_{r,s,t,v}$ sich auch auf diskrete Funktionen anwenden lassen

(z.B. $\tau_{rs} \alpha_{ij} = \alpha_{i-r, j-s}$). Analog zu (1.2.3) gilt für $Z \subset \Xi \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ [19, Proposition 2.1]

$$(1.2.7) \quad D_Z B_\Xi = \nabla_Z B_{\Xi \setminus Z}.$$

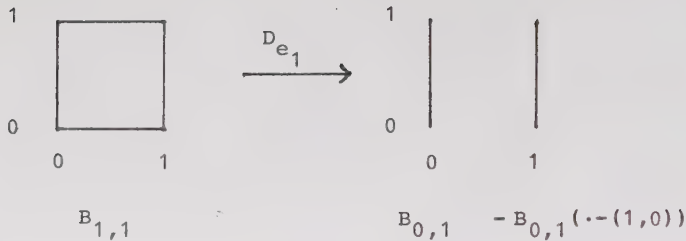
Dies impliziert für $m = 2$ die später häufig verwendete Formel

$$\begin{aligned} (1.2.8) \quad D_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left(\sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_{ij} \tau_{ij} B_{r,s,t,v} \right) &= \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} (\nabla_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} a_{ij}) \tau_{ij} B_{r-\alpha, s-\beta, t-\gamma, v-\delta}, \end{aligned}$$

wobei $r \geq \alpha, s \geq \beta, t \geq \gamma, v \geq \delta$ gelte.

$B_{r,o,o,o}$ ist eine nichtreguläre Distribution auf $\mathbb{R}^2$, deren Träger $[0, r] \times \{0\}$ ist. Sie kann als Tensorprodukt des eindimensionalen B-Splines B_r und der Deltadistribution δ aufgefaßt werden. Ähnlich können $B_{o,s,o,o}, B_{o,o,t,o}$ und $B_{o,o,o,v}$ interpretiert werden. Diese Distributionen werden unter anderem bei der Differentiation von Boxsplines auftreten und deuten deren Sprungstellen an. Wir wollen ein einfaches Beispiel betrachten. $B_{1,1}$ ist die charakteristische Funktion von $[0, 1]^2$ ($B_{1,1} = \chi_{[0,1]^2}$). Nach (1.2.7) gilt

$$D_{e_1} B_{1,1} = \nabla_{e_1} B_{0,1} = B_{0,1} - B_{0,1}(\cdot - e_1)$$



Der Träger von $D_{e_1} B_{1,1}$ ist $A := \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1]$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ist $D_{e_1} B_{1,1} = 0$. $B_{1,1}$ ist auf jedem Teilgebiet seiner Zerlegung konstant und macht in $\{0\} \times [0,1]$ und $\{1\} \times [0,1]$ Sprünge in e_1 -Richtung. Der Träger aller zu betrachtenden nichtregulären Distributionen wird auf den Gitterlinien liegen. $B_{r,s,t,v}$ ist genau dann eine reguläre Distribution, wenn mindestens zwei der Indizes $r,s,t,v \geq 1$ sind. Oft werden wir die Tatsache benutzen, daß aus der Gleichheit einer regulären und einer nichtregulären Distribution deren Verschwinden folgt. Ähnlich wie bei Conesplines folgt aus (1.2.8):

- $B_{r,s,t,v}$ ist auf jedem Teilgebiet seiner Zerlegung ein Polynom des Grades $r+s+t+v-2$

- Mit

$$(1.2.9) \quad d := (r+s+t+v - \max(r,s,t,v)) - 1$$

gilt

$$(1.2.10) \quad B_{r,s,t,v} \in C^{d-1}(\mathbb{R}^2), \quad \text{speziell}$$

(1.2.11) alle Ableitungen der Ordnung $\leq$

$$\left\{ \begin{array}{l} s+t+v-2 \\ r+t+v-2 \\ r+s+v-2 \\ r+s+t-2 \end{array} \right\} \quad \text{sind über} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} e_1 \\ \mathbb{R} e_2 \\ \mathbb{R}(e_1+e_2) \\ \mathbb{R}(e_1-e_2) \end{array} \right\} \quad \text{stetig}.$$

Ferner sei $B_{0,0,0,0} = \delta$ die Deltadistribution.

Es sei noch erwähnt, daß der polyedrische Spline M_Q in (1.2.2) den Träger PQ hat und in seinem Innerem strikt positiv ist. Ist in (1.2.1) und (1.2.2) $n = m$, so ist $M_Q = \alpha \chi_Q$ mit $\alpha > 0$.

Analog zu (1.2.2) kann der diskrete Conespline $c_{\Xi} : L(\Xi) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert werden, indem das Integral durch eine Summation ersetzt wird [57, (4.6.14), 70, 48]. Mit

$\Xi = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{Z}^m$, $0 \notin \text{con}(z^1, \dots, z^n)$ und $L(\Xi) := \{ \sum_{i=1}^n \beta_i z^i : \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{Z} \}$ definiere man

$c_{\Xi} : L(\Xi) \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß

$$(1.2.12) \quad \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \varphi\left(\sum_{i=1}^n \beta_i z^i\right) = \sum_{\alpha \in L(\Xi)} c_{\Xi}(\alpha) \varphi(\alpha)$$

für alle Testfunktionen $\varphi : L(\Xi) \rightarrow \mathbb{R}$, die an nur endlich vielen Stellen nicht verschwinden, gilt. Unter obiger Voraussetzung existieren folgende Darstellungen.

Satz 1.2.1 [57, Proposition 4.6.1]:

$\Xi \in \mathbb{Z}^m$, $0 \notin \text{con}(\Xi)$. Dann ist

$$(1.2.13) \quad C_{\Xi} = \sum_{\alpha \in L(\Xi)} c_{\Xi}(\alpha) \tau_{\alpha} B_{\Xi} \quad \text{und}$$

$$(1.2.14) \quad (-1)^{|\Xi|} \Delta_{\Xi} C_{\Xi} = B_{\Xi}$$

Es ist möglich, aus zwei polyedrischen Splines einen neuen zu definieren.

Satz 1.2.2 [63, Lemma 1]:

$P_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, seien lineare Abbildungen, $Q_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ seien konvexe Polyeder, und die Distributionen M_{Q_i} nach (1.2.2) seien wohldefiniert.

Der von $P_1 \oplus P_2 : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(z_1, z_2) \mapsto P_1 z_1 + P_2 z_2$ induzierte polyedrische Spline $M_{Q_1 \times Q_2}$ sei ebenfalls wohldefiniert. Dann gilt $M_{Q_1 \times Q_2} = M_{Q_1} * M_{Q_2}$.

$M_{Q_1} * M_{Q_2}$ ist die Faltung der beiden Distributionen M_{Q_1} und M_{Q_2} . Sind M_{Q_1} und M_{Q_2} regulär, so ist

$$M_{Q_1 \times Q_2}(u) = \int_{\mathbb{R}^m} M_{Q_1}(u-v) M_{Q_2}(v) dv, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Nach Satz 1.2.2 gilt somit $B_{r,s,t,v} = \underbrace{B_{1,0,0,0} * \dots * B_{1,0,0,0}}_r$

$$\underbrace{*B_{0,1,0,0} * \dots * B_{0,1,0,0}}_s * \underbrace{B_{0,0,1,0} * \dots * B_{0,0,1,0}}_t$$

$$\underbrace{*B_{0,0,0,1} * \dots * B_{0,0,0,1}}_v.$$

Ist Γ ein Differenzen-, Differentialoperator oder τ_z sind f und g Distributionen, deren Faltung existiert, so gilt $\Gamma(f*g) = (\Gamma f)*g = f*(\Gamma g)$.

Solche Umformungen werden später laufend verwendet. Mit Hilfe von Faltungen werden neue Splines mit kompakten Trägern konstruiert, die in gewissen Splineräumen einen minimalen Träger haben.

Auch für diskrete Conesplines kann man eine Faltung angeben. Sind $E_1, E_2 \subset \mathbb{Z}^m$, so daß c_{E_1} , c_{E_2} und $c_{E_1 \cup E_2}$ wohldefiniert sind, so ist

$$(1.2.15) \quad c_{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2} = c_{\mathbb{E}_1} * c_{\mathbb{E}_2} ,$$

$$\text{wobei } (c_{\mathbb{E}_1} * c_{\mathbb{E}_2})(\alpha) = \sum_{\beta \in L(\mathbb{E}_2)} c_{\mathbb{E}_1}(\alpha - \beta) c_{\mathbb{E}_2}(\beta)$$

die diskrete Faltung ist [70, (2.9)].

1.3. Splines in einer Dimension

B_r , der B-Spline r -ter Ordnung mit den Knoten $0, 1, \dots, r$, kann sowohl als Boxspline ($= (1:r)$) als auch als Simplex-spline aufgefaßt werden. Die erste Deutung von B_r als Simplex-spline wurde in [49] gegeben. Für die Darstellung der Polynome als Linearkombination von $(\tau_i B_r, i \in \mathbb{Z})$ ist die Marsdendische Identität von fundamentaler Bedeutung [127, Theorem 4.21, Seite 125]. Im Fall des Gitters $\mathbb{Z}$ lautet sie

Satz 1.3.1: Es sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(1.3.1) \quad (x-y)^{r-1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\prod_{j=1}^{r-1} (i+j-y) \right] \tau_i B_r(x) .$$

Es sei darauf hingewiesen, daß für die Aussage über die Darstellung aller Polynome nicht die Kenntnis von Gleichung (1.3.1) für alle $y \in \mathbb{R}$ erforderlich ist, sondern nur für r verschiedene Werte von y .

Wir wollen nun zeigen, daß (1.3.1) mit (1.2.13) für $y = 0$ und $x \geq 0$ äquivalent ist. Zunächst zeigen wir

$$(1.3.2) \quad C_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} x_+^{r-1} .$$

$$\left(x_+ = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \right)$$

Beweis von (1.3.2) durch Induktion:

Für $r = 1$ ist $C_1 = \chi_{[0, \infty)}$.

$$C_{r+1}(x) = (\chi_{[0,\infty)} * C_r)(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)}(x-y) y_+^{r-1} dy =$$

$$\begin{cases} \frac{x^r}{r!} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{q.e.d. (1.3.2)}$$

Ferner gilt

$$(1.3.3) \quad c_r(i) = \sum_{l_{r-2}=0}^1 \sum_{l_{r-3}=0}^{r-2} \dots \sum_{l_0=0}^1 =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} (i+j)_+ , \quad i \in \mathbb{Z} , r \geq 2 .$$

Beweis von (1.3.3): Es ist klar, daß für $\Xi = (1:r)$ $L(\Xi) = \mathbb{Z}$ ist. Es ist

$$c_1(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{falls } i \leq -1 \end{cases} .$$

Da die geschachtelte Summe als wiederholte Faltung von c_1 aufgefaßt werden kann, ist die erste Gleichung wegen (1.2.15) klar. Die zweite Gleichung muß nur für $i \geq 0$ nachgewiesen werden und wird durch Induktion gezeigt. Für $i = 0$ und $r \geq 2$ beliebig sowie für $i \geq 0$ beliebig und $r = 2$ ist sie unmittelbar einzusehen.

Sei sie nun für r und i als auch für alle $\tilde{r} < r$ mit beliebigen i bereits bewiesen. Wir zeigen, daß sie dann auch für r und $i+1$ erfüllt ist. Dies ergibt

$$\sum_{l_{r-2}=0}^{i+1} \sum_{l_{r-3}=0}^{r-2} \dots \sum_{l_0=0}^1 1 = \sum_{l_{r-2}=0}^i \dots \sum_{l_0=0}^1 1 + \sum_{l_{r-3}=0}^{i+1} \dots$$

$$\sum_{l_0=0}^1 1 = \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} (i+j) + \frac{1}{(r-2)!} \prod_{j=1}^{r-2} (i+1+j) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} (i+1+j)$$

Damit ist (1.3.3) bewiesen.

Falls $i \geq -r+1$ (also $i \in \{i \in \mathbb{Z} : \text{supp } \tau_i B_r \cap (0, \infty) \neq \emptyset\}$) ist

$$\prod_{j=1}^{r-1} (i+j)_+ = \prod_{j=1}^{r-1} (i+j).$$
 Damit ist die Äquivalenz von (1.2.13) und (1.3.1) für $y = 0$ und $x \geq 0$ bewiesen. Um alle Polynome auf $[0, \infty)$ darzustellen, nehme man in (1.3.1) $y = -r+1, -r+2, \dots, 0$ und ersetze $(x-y)^{r-1}$ und $\prod_{j=1}^{r-1} (i+j-y)$ durch die jeweiligen Conesplines. Es sei darauf hingewiesen, daß in mehreren Dimensionen für Boxsplines keine der Marsdenschen Identität (1.3.1) analoge Formel existiert.

In der eindimensionalen Theorie spielen Dualbasen für B-Splines eine wichtige Rolle [13,127]. Darunter versteht man lineare Funktionale $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ auf $\text{span}(\tau_j B_r, j \in \mathbb{Z})$ mit

$$(1.3.4) \quad \lambda_i \tau_{j+v} = \delta_{ij} \quad (v \in \mathbb{Z} \text{ fest}).$$

Sie können dann auf einen übergeordneten Raum fortgesetzt werden, der hier meist $C([0, N])$ mit der Supremumsnorm ist.

Wir konstruieren eine Dualbasis $(\lambda_i^{(\sigma)})_{i \in \mathbb{Z}}$ für festes $\sigma \in \{1, \dots, r\}$, wobei der Träger von $\lambda_i^{(\sigma)}$ in $[i, i+1]$ liegt.

Die Träger der r Splines $\tau_j B_r, j = (i-r)+1, \dots, (i-r)+r$ haben nichtleeren Durchschnitt mit $(i, i+1)$.

Man wähle die r Punkte $t_v^{(i)} := i + \frac{v}{r-1}, v = 0, \dots, r-1$ in

$[i, i+1]$. Nun definiere man das Funktional

$\lambda_i^{(\sigma)} f := \sum_{v=0}^{r-1} \alpha_v^{(\sigma)} f(t_v^{(i)})$. Zu dem festen $\sigma \in \{1, \dots, r\}$ können die $\alpha_v^{(\sigma)}, v = 0, \dots, r-1$ so bestimmt werden, daß

$$(1.3.5) \quad \lambda_i^{(\sigma)} (\tau_{(i-r)+\rho} B_r) = \delta_{\sigma\rho}.$$

Dies ist möglich, weil die r verschiedenen Polynome über den r Teilintervallen des Trägers von B_r linear unabhängig sind. Insgesamt wird $(\lambda_i^{(\sigma)})_{i \in \mathbb{Z}}$ zu einer Dualbasis zu

$(\tau_{j+\sigma-r} B_r)_{j \in \mathbb{Z}}$. In Kapitel 4 ist es wichtig, solche stetig-

gen Funktionale zu haben, deren Träger in einem bestimmten Intervall liegt und deren Norm bei einer Skalierung beschränkt bleibt. Ist $(\lambda_{i,h})_{i \in \mathbb{Z}}$ die "skalierte" Dualbasis zu $(\tau_{j+v} B_r(\frac{\cdot}{h}))_{j \in \mathbb{Z}}$ ($v \in \mathbb{Z}$ fest), wobei der Träger von $\lambda_{i,h}$ in $[ih, (i+1)h]$ liegt, so folgt bei deren Anwendung auf Funktionen f

$$(1.3.6) \quad \lambda_{i,h} f = f(ih) + O(h)$$

für alle $f \in C^1(\Omega)$. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $[ih, (i+1)h] \subset \Omega$. Dies ergibt sich durch Taylorentwicklung:

$$f(x) = f(ih) + \varphi_h(x) \quad \forall x \in [ih, (i+1)h] \quad \text{mit}$$

$$\|\varphi_h\|_{[ih, (i+1)h]} \leq h \|f'\|_{[ih, (i+1)h]}.$$

Nun ist $\lambda_{i,h} f = f(ih) + \lambda_{i,h} \varphi_h$, da wegen $\sum_{j \in \mathbb{Z}} B_r(\frac{x}{h} - j) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (vgl. (1.4.1)) $\lambda_{i,h} c = c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Ferner ist $|\lambda_{i,h} \varphi_h| \leq \|\lambda_{i,h}\| \|\varphi_h\|_{[ih, (i+1)h]} \leq h \|f'\|_{[ih, (i+1)h]}$ da die Normen von $\lambda_{i,h}$ gleichmäßig in bezug auf h beschränkt sind. Die Konstante in $O(h)$ hängt also nur von $\|f'\|_{\Omega}$ ab.

Die bisher weit entwickelte Theorie der eindimensionalen Splines erlaubt eine Ausdehnung der Aussagen auf Tensorprodukte wie $B_{r,s}$, $B_{r,o,t}$ oder $B_{o,o,t}$. Weitere Anwendungen findet man oft bei einer Zerlegung durch Faltung.

Bei der Untersuchung von Linearkombinationen von Boxsplines kommt den Koeffizienten, die durch Anwendung einer Dualbasis gewonnen werden können, eine besondere Bedeutung zu. Weiß man von einer Folge a_i , $i = -1, \dots, N$ nur die Werte $\nabla_1 a_i = a_i - a_{i-1}$, $i = 0, \dots, N$, so läßt sie sich durch Summation rekonstruieren:

$$\sum_{l=0}^i \nabla_1 a_l = a_i - a_{-1}, \quad i = -1, \dots, N.$$

Analog kann man durch mehrfache Summation höhere Differenzen $\nabla_r a_i$ auflösen. Dies wollen wir nun exakt durchführen.

Gegeben sei eine Folge a_i , $i = -r, \dots, N$.

Aus $\nabla_{r-\sigma} a_i = \nabla_{r-\sigma-1} a_i - \nabla_{r-\sigma-1} a_{i-1}$, $i = -\sigma, \dots, N$ ergibt eine Summation

$$(1.3.7) \quad \nabla_{r-\sigma-1} a_1 = \sum_{i=-\sigma}^1 \nabla_{r-\sigma} a_i + \nabla_{r-\sigma-1} a_{-\sigma-1},$$

$$1 = -\sigma - 1, \dots, N.$$

Im folgenden zeigen wir durch Induktion

(1.3.8) Für $v = 1, \dots, r$ gilt:

$$\nabla_{r-v} a_{1_v} = \sum_{l_{v-1}=0}^1 \dots \sum_{l_1=0}^1 \sum_{l_0=0}^1 \nabla_r a_{1_0} + \sum_{\rho=1}^{v-1} \sum_{l_{v-1}=-\rho}^1 \dots$$

$$\dots \sum_{l_{\rho}=-\rho}^{\rho+1} \nabla_{r-\rho} a_{-\rho} + \nabla_{r-v} a_{-v}, \quad l_v = -v, \dots, N.$$

Beweis von (1.3.8): Für $v=1$ ist dies (1.3.7) mit $\sigma=0$. Unter der Annahme, daß (1.3.8) für v schon bewiesen wurde, folgt für $v+1$

$$(1.3.7) \text{ mit } \sigma=v$$

$$\nabla_{r-(v+1)} a_{1_{v+1}} = \sum_{l_v=-v}^1 \left[\nabla_{r-v} a_{1_v} \right] + \nabla_{r-v-1} a_{-v-1} =$$

$$= \sum_{l_v=-v}^1 \sum_{l_{v-1}=0}^1 \dots \sum_{l_0=0}^1 \nabla_r a_{1_0} + \sum_{\rho=1}^{v-1} \sum_{l_{v-1}=-\rho}^1 \dots \sum_{l_{\rho}=-\rho}^{\rho+1} \nabla_{r-\rho} a_{-\rho} +$$

$$+ \nabla_{r-v} a_{-v} + \nabla_{r-(v+1)} a_{-(v+1)} = \sum_{l_v=0}^{v+1} \dots \sum_{l_0=0}^1 \nabla_r a_{1_0} +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^v \sum_{l_v=-\rho}^{v+1} \dots \sum_{l_{\rho}=-\rho}^{\rho+1} \nabla_{r-\rho} a_{-\rho} + \nabla_{r-(v+1)} a_{-(v+1)}.$$

Dies ist die Formel für $v+1$, womit (1.3.8) bewiesen ist.

Wir brauchen (1.3.8) speziell für $v=r$:

$$(1.3.9) \quad a_{l_r} = \sum_{l_{r-1}=0}^1 \dots \sum_{l_0=0}^1 \nabla_r a_{l_0} + \sum_{\rho=1}^{r-1} \sum_{l_{r-1}=-\rho}^1 \dots$$

$$\dots \sum_{l_\rho=-\rho}^{\rho+1} (\nabla_{r-\rho} a_{-\rho}) + a_{-r}, \quad l_r = -r, \dots, N.$$

Man beachte, daß in der zweiten Summe $\nabla_{r-\rho} a_{-\rho}$ unabhängig vom Summationsindex ist und deshalb herausgezogen werden kann. Folglich ergeben die restlichen Ausdrücke ein Polynom aus $\mathbb{P}_{r-1}$ bezüglich der diskreten Variablen l_r . (1.3.9) brauchen wir später vor allem in dieser Form.

$$(1.3.10) \quad a_{l_r} = \sum_{l_{r-1}=0}^1 \dots \sum_{l_0=0}^1 \nabla_r a_{l_0} + q(l_r),$$

$$l_r = -r, \dots, N,$$

mit $q \in \mathbb{P}_{r-1}$

Man beachte die Analogie zur Integration. Das entstehende Polynom q kann als "Randterm", der durch Anfangsvorgaben bestimmt wird, interpretiert werden. In Kapitel 4 werden wir (1.3.10) auf zweidimensionale Folgen a_{ij} bezüglich bestimmter Richtungen anwenden, um durch die Kenntnis der höheren Differenzen zu Aussagen über die Folge selbst zu kommen. Die explizite Form des Polynoms q ist dabei nicht erforderlich.

1.4. Boxsplines

Wegen der großen Bedeutung der Boxsplines sollen hier noch einige wichtige Eigenschaften zusammengefaßt werden. Die Boxsplines bilden eine Partition der Eins. Sei $E \subset \mathbb{Z}^m$ mit $\text{span}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i z^i : \alpha_i \in \mathbb{R}, z^i \in E, i = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^m$. Dann ist ([19])

$$(1.4.1) \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} \tau_l B_{\Xi} = 1$$

Insbesondere folgt hieraus

$$(1.4.2) \quad 0 \leq B_{\Xi}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Es ergibt sich unmittelbar, daß Boxsplines zur Approximation geeignet sind. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kompakt,

$J_h := \{l \in \mathbb{Z}^m : \text{supp } \tau_l B_{\Xi}(\frac{\cdot}{h}) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ und $f \in C^1(\Omega)$, so ergibt (1.4.1) und die Kompaktheit von $\text{supp } B_{\Xi}$

$$(1.4.3) \quad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{l \in J_h} f(lh) \tau_l B_{\Xi}\left(\frac{x}{h}\right) + o(h) = \\ &= \sum_{l \in J_h} f(lh) B_{\Xi}\left(\frac{x}{h} - l\right) + o(h) \end{aligned}$$

gleichmäßig für $x \in \Omega$.

(Man beachte, daß nach [134, Lemma 2] eine Fortsetzung $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ existiert).

Im folgenden wollen wir die von den Splines erzeugten Polynome charakterisieren. Sei

$$(1.4.4) \quad S(\Xi) = \text{span}(\tau_l B_{\Xi}, l \in \mathbb{Z}^m) \text{ und } \mathbb{P} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_k.$$

Wir definieren nun

$$(1.4.5) \quad \mathcal{D}(\Xi) := \{f \text{ Distribution auf } \mathbb{R}^m \text{ mit}$$

$D_Y f = 0 \text{ für alle } Y \subset \Xi, \text{ für die } \text{span}(\Xi \setminus Y) \neq \mathbb{R}^m \text{ ist}\}.$

Man beachte, daß für alle solche $Y \subset \Xi$ $D_Y B_{\Xi}$ eine nichtreguläre Distribution ist. Im Fall $m = 2$ und

$\Xi = (e_1 : r, e_2 : s, e_1 + e_2 : t)$ schreiben wir

$$(1.4.6) \quad \mathcal{D}(r, s, t) := \mathcal{D}(\Xi) = \{f \text{ Distribution auf } \mathbb{R}^m : D_{r, s, 0} f = D_{0, s, t} f = D_{r, 0, t} f = 0\}$$

und falls $\Xi = (e_1 : r, e_2 : s, e_1 + e_2 : t, e_1 - e_2 : v)$

$$(1.4.7) \quad \mathcal{D}(r, s, t, v) := \mathcal{D}(\Xi) = \{f \text{ Distribution auf } \mathbb{R}^m : D_{r, s, t, 0} f = D_{r, s, 0, v} f = D_{r, 0, t, v} f = D_{0, s, t, v} f = 0\}.$$

Mit Hilfe des Hilbertschen Nullstellensatzes wurde in [64] gezeigt:

$$(1.4.8) \quad \mathcal{D}(\Xi) \subset \mathbb{P}$$

Nach [19, Theorem 5] gilt

$$(1.4.9) \quad \mathcal{D}(\Xi) = S(\Xi) \cap \mathbb{P},$$

d.h. $\mathcal{D}(\Xi)$ sind genau die Polynome, die von den Boxsplines $\tau_1 B_\Xi$ erzeugt werden, und die Abbildung

$$(1.4.10) \quad \begin{aligned} \Psi: \mathcal{D}(\Xi) &\rightarrow \mathcal{D}(\Xi) \\ p &\rightarrow \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} p(l) \tau_1 B_\Xi \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

In [64, Proposition 2.1] wurde dies mittels der Poissonschen Summationsformel gezeigt. Analog zu (1.2.5) und (1.2.9) lässt sich für allgemeines Ξ

$$(1.4.11) \quad d(\Xi) := \min\{|Y| : Y \subset \Xi \text{ mit } \text{span}(\Xi \setminus Y) \neq \mathbb{R}^m\} - 1$$

definieren. Dann ist

$$(1.4.12) \quad \mathbb{P}_{d(\Xi)} \subset S(\Xi) \subset \mathbb{P}_{|\Xi|-m},$$

$$(1.4.13) \quad \mathbb{P}_{d(\Xi)+1} \not\subset S(\Xi) \quad \text{und}$$

$$(1.4.14) \quad S(\Xi) \subset C^{d(\Xi)-1}(\mathbb{R}^m) \setminus C^{d(\Xi)}(\mathbb{R}^m) \quad ([57]).$$

In einer Reihe von Arbeiten ist die lineare Abhängigkeit der Boxsplines $(\tau_1 B_\Xi)_{l \in \mathbb{Z}^m}$ untersucht worden [19, 57, 64, 66, 67, 68, 69, 99, 101]. Wir charakterisieren nun die lineare Unabhängigkeit.

Satz 1.4.1 ([66, Theorem 4, 68]): $\Xi \subset \mathbb{Z}^m$, $\text{span}(\Xi) = \mathbb{R}^m$. $\Omega \in \mathbb{R}^m$ sei ein Gebiet, das nicht von dem von $S(\Xi)$ induzierten Gitter geschnitten wird (also $s|_\Omega \in \mathbb{P}$ für alle $s \in S(\Xi)$). Dann ist

$$1. \quad \{s|_\Omega : s \in S(\Xi)\} = \{f|_\Omega : f \in \mathcal{D}(\Xi)\}.$$

Sei $J := \{l \in \mathbb{Z}^m : \text{supp } \tau_1 B_\Xi \cap \Omega \neq \emptyset\}$. Die folgenden Bedingungen sind dann äquivalent.

2 a. $\sum_{1 \in J} \alpha_1 \tau_{1B_E}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ impliziert

$$\alpha_1 = 0 \quad \forall 1 \in J.$$

2 b. Für alle Basen $Z \subseteq E$ gilt $|\det Z| = 1$

2 c. $\sum_{1 \in \mathbb{Z}^m} \alpha_1 \tau_{1B_E}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$ impliziert

$$\alpha_1 = 0 \quad \forall 1 \in \mathbb{Z}^m.$$

Bedingung 2 a. drückt die lokale lineare Unabhängigkeit der Boxsplines aus, die zunächst als stärker erscheint als die globale lineare Unabhängigkeit 2 c. Aufgrund von 2 b. ergibt sich, daß $\tau_{1B_{r,s,t}}$ stets (lokal) linear unabhängig sind, während $\tau_{1B_{r,s,t,v}}$ für $t, v \geq 1$ lokal abhängig sind ($|\det(e_1+e_2, e_1-e_2)| = 2$). Satz 1.4.1 ergibt nun sofort

$$(1.4.15) \quad \dim \mathcal{D}(r,s,t) = st + rt + rs$$

(= Anzahl der oberen bzw. unteren Dreiecke von $\text{supp } B_{r,s,t}$)

In [68] werden lokale Abhängigkeiten in einem breiten Rahmen behandelt. Hier wollen wir einen elementaren Beweis für die Abhängigkeiten von $B_{r,s,t,v}$ angeben.

Satz 1.4.2: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet,

$J = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ijB_{r,s,t,v}} \cap \Omega \neq \emptyset\}$. Dann ist

$\sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} \tau_{ijB_{r,s,t,v}}(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \Omega$ genau

dann erfüllt, wenn es ein Polynom

$$p(x,y) = \sum_{\sigma=0}^{t-1} \sum_{\rho=0}^{v-1} b_{\sigma\rho} x^\sigma y^\rho \quad \text{gibt mit}$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} p(i+j, i-j) \quad \forall (i,j) \in J.$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " : Ohne Einschränkung habe p die Form

$$p(x,y) = \prod_{\sigma=1}^{t-1} \left(\frac{x}{2} - u - \sigma \right) \prod_{\sigma=1}^{v-1} \left(\frac{y}{2} - v - \sigma \right)$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß

$$\varphi(x,y) := \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (-1)^{i+j} p(i+j, i-j) B_{0,0,t,v}(x-i, y-j) = 0$$

ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nach Abschnitt 1.2 gilt $B_{0,0,t,v}(x,y) = B_t(\frac{x+y}{2}) B_v(\frac{x-y}{2})$.

Setzt man dies ein mit $\xi := \frac{x+y}{2}$, $\eta := \frac{x-y}{2}$, so berechnet

man $(J_1 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i+j \text{ gerade}\},$

$J_2 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i+j \text{ ungerade}\})$

$$\varphi = \sum_{(i,j) \in J_1} \prod_{\sigma=1}^{t-1} \left(\frac{i+j}{2} - u + \sigma \right) \prod_{\sigma=1}^{v-1} \left(\frac{i-j}{2} - v + \sigma \right) B_t\left(\xi - \frac{i+j}{2}\right) \times$$

$$\times B_v\left(\eta - \frac{i-j}{2}\right) - \sum_{(i,j) \in J_2} \prod_{\sigma=1}^{t-1} \left(\frac{i+j+1}{2} - (u + \frac{1}{2}) + \sigma \right) \prod_{\sigma=1}^{v-1} \left(\frac{i-j+1}{2} - (v + \frac{1}{2}) + \sigma \right) \times$$

$$\times B_t\left(\xi + \frac{1}{2} - \frac{i+j+1}{2}\right) B_v\left(\eta + \frac{1}{2} - \frac{i-j+1}{2}\right) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \prod_{\sigma=1}^{t-1} (1-u+\sigma) B_t(\xi-1) \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{\rho \in \mathbb{Z}} \prod_{\sigma=1}^{v-1} (\rho-v+\sigma) B_v(\eta-\rho) \right) - \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \prod_{\sigma=1}^{t-1} (1-(u+\frac{1}{2})+\sigma) B_t(\xi+\frac{1}{2}-1) \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{\rho \in \mathbb{Z}} \prod_{\sigma=1}^{v-1} (\rho-(v+\frac{1}{2})+\sigma) B_v(\eta+\frac{1}{2}-\rho) \right) \stackrel{(1.3.1)}{=} (\xi-u)^{t-1} (\eta-v)^{v-1} -$$

$$- ((\xi+\frac{1}{2}) - (u+\frac{1}{2}))^{t-1} ((\eta+\frac{1}{2}) - (v+\frac{1}{2}))^{v-1} = 0.$$

$$\text{Deshalb } \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (-1)^{j+j} p(i+j, i-j) B_{r,s,t,v}(x-i, y-j) =$$

$$= \varphi * B_{r,s,0,0} = 0.$$

$$" \Rightarrow " : \text{ Sei } \varphi(x,y) := \sum_{(i,j) \in J} \alpha_{ij} \tau_{ij} B_{r,s,t,v} = 0$$

für alle $(x,y) \in \Omega$.

Durch Differentiation erhält man

$$0 = D_{0,0,t,0} \varphi = \sum_{i,j} \nabla_{0,0,t,0} \alpha_{ij} \tau_{ij} B_{r,s,0,v}.$$

Nach Satz 1.4.1 sind diese Boxsplines linear unabhängig,

weshalb $\nabla_{0,0,t,0} \alpha_{ij} = 0$ gilt. Ebenso erhält man aus

$$0 = \nabla_{0,0,0,v} \varphi : \quad \nabla_{0,0,0,v} \alpha_{ij} = 0$$

Daher gibt es $p_1, p_2 \in \text{span}(x^\sigma y^\rho : 0 \leq \sigma \leq t-1, 0 \leq \rho \leq v-1)$

mit $\alpha_{ij} = p_1(i+j, i-j) \forall (i,j) \in J_1 := \{(i,j) \in J : i+j \text{ gerade}\}$

und $\alpha_{ij} = p_2(i+j, i-j) \forall (i,j) \in J_2 := \{(i,j) \in J : i+j \text{ ungerade}\}$.

Also

$$0 = \varphi = \sum_{(i,j) \in J_1} p_1(i+j, i-j) \tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}} + \sum_{(i,j) \in J_2} p_2(i+j, i-j)$$

$$\tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}} = - \sum_{(i,j) \in J} (-1)^{i+j} p_2(i+j, i-j) \tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}} +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in J_1} (p_1 + p_2)(i+j, i-j) \tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}} =$$

$$= \sum_{(i,j) \in J_1} (p_1 + p_2)(i+j, i-j) \tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}},$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem schon bewiesenen Teil des Satzes folgt. Wir müssen nur noch $p_1 + p_2 = 0$ zeigen. Dies ist richtig, wenn folgende Behauptung bewiesen ist:

$$\Psi : P \rightarrow P, \quad \Psi_1 q := \sum_{(i,j) \in J_1} q(i,j) \tau_{ij}^{B_{r,s,t,v}} \text{ ist für}$$

$$P := \text{span}((x+y)^\sigma (x-y)^\rho : 0 \leq \sigma \leq t-1, 0 \leq \rho \leq v-1) =$$

{f Distribution auf $\Omega : \nabla_{0,0,t,0} f = \nabla_{0,0,0,v} f = 0$ } ein wohldefinierter Isomorphismus.

Die Wohldefiniertheit folgt sofort aus (1.2.8). Mit Hilfe von Satz 1.3.1 ergibt sich, daß

$$\Psi_1 : P \rightarrow P, \quad \Psi_1 a := \sum_{(i,j) \in J_1} a(i,j) \tau_{ij}^{B_{0,0,t,v}} \text{ ein wohl-}$$

definierter Isomorphismus ist (vgl. (1.4.10)), indem man $B_{0,0,t,v}$ als Tensorprodukt eindimensionaler Splines in der dritten und vierten Richtung auffaßt. Nun behaupten wir, daß

$$\Psi_2 : P \rightarrow P, \quad \Psi_2 q := q * B_{r,s,0,0}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist. Die Wohldefiniertheit

ergibt sich aus $\mathcal{D}_{0,0,t,0}(\Psi_2 q) = (\mathcal{D}_{0,0,t,0} q) * B_{r,s} = 0 * B_{r,s} = 0$
 $\mathcal{D}_{0,0,0,v}(\Psi_2 q) = 0$. Es ist nur die Injektivität von Ψ_2
zu zeigen. Für ein Polynom q sei $\deg q$ sein Grad. Es ist nun
leicht einzusehen, daß $\deg q = \deg(q * B_{r,s})$ gilt. Dies er-
gibt aber unmittelbar, daß Ψ_2 injektiv ist. Wegen $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$
folgt nun, daß Ψ ein Isomorphismus ist.
Damit ist Satz 1.4.2 bewiesen.

Satz 1.4.1 und Satz 1.4.2 gestatten nun die Dimension von
 $\mathcal{D}(r,s,t,v)$ zu berechnen. $B_{r,s,t,v}$ hat $rs + rt + rv + st + sv + 2tv$
obere und untere Dreiecke. Nach Satz 1.4.2 gibt es tv Ab-
hängigkeiten. Deshalb

$$(1.4.16) \quad \dim \mathcal{D}(r,s,t,v) = rs + rt + rv + st + sv + tv$$

Im eindimensionalen Fall wird die Rekursionsrelation für
B-Splines ausgenutzt, um sie numerisch auszuwerten. Auch
in mehreren Dimensionen existiert eine Rekursionsformel,
doch ist sie zu kompliziert und langwierig. Deshalb greift
man auf die explizite Angabe der einzelnen Polynome auf der
Zerlegung zurück [40,41,42,121] oder verwendet einen Unter-
teilungsalgorithmus [7,9,48,56,70] .

KAPITEL 2:

Splines in zwei Dimensionen auf regulären Triangulationen

Hier sollen Eigenschaften von Splineräumen dargestellt werden, die auf den Triangulationen vom Typ 1 und Typ 2 definiert sind. In Abschnitt 2.1 wird ihre Dimension und in Abschnitt 2.2 ein Erzeugendensystem angegeben, das aus einer Summe von Boxsplines, abgeschnittenen Potenzfunktionen und Polynomen besteht. Daraus ergibt sich, daß für einen festen Grad eine maximale Glattheit existiert, bei der es noch Splines mit kompaktem Träger gibt. In Abschnitt 2.3 wird in das schwierige Gebiet der Approximation in Splineräumen eingeführt. Es wird gezeigt, daß die exakte Approximationsordnung eines Splineriums durch die seiner Boxsplines gegeben ist. Hierfür wird die lokale L_p -Approximation eines Systems von Funktionen mit kompaktem Träger definiert. Mittels der Markovschen Ungleichung werden Hilfsmittel bereitgestellt, die zunächst obere Schranken für die Approximationsordnung liefern, die sich als nicht optimal herausstellen, aber in Kapitel 4 zu einer weiteren Verbesserung benutzt werden. Abschnitt 2.4 und 2.5 sind speziellen Splineräumen auf $\Delta^{(1)}$ bzw. $\Delta^{(2)}$ gewidmet. Es werden die neuen Resultate gezeigt, daß der Boxspline in $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ minimalen Träger hat, ebenso wie die beiden neu konstruierten Splines in $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$. Wir beweisen, daß die Splines mit minimalem Träger denselben Raum aufspannen wie die Boxsplines. Die Darstellung der speziellen Splineräume soll als Grundlage für Kapitel 3 dienen, in dem eine Basis angegeben wird.

2.1. Dimension von Splineräumen

Eine der ersten Fragen, die sich bei der Untersuchung von Splineräumen auf fest vorgegebenen Triangulationen ergeben, ist ihre Dimension. Eine Reihe von Arbeiten beschäftigt sich

damit [15,35,36,37,43,113,114,128,129]. Es zeigt sich jedoch, daß die Dimension von der Geometrie der Zerlegung abhängt [43,114]. Deshalb betrachtet man reguläre Triangulationen wie $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ und $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}$. Für diese existiert die folgende Aussage.

Satz 2.1.1 [43, Corollary 2]:

$\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ und $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}$ seien die in Abschnitt 1.1 definierten Triangulationen von $(O,N) \times (O,\tilde{N})$. Für $l \in \{v \in \mathbb{Z} : v \geq -1\}$ sei $\eta(l) := \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ die Dimension von $\mathbb{P}_1$ und $\eta(l) = 0$ für $l < -1$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x] := \max\{v \in \mathbb{Z} : v \leq x\}$ und $x_+ := \max(x, 0)$. Dann ist die Dimension gegeben durch

$$(2.1.1) \quad \dim S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) = \eta(k) + (2N+2\tilde{N}-3)\eta(k-\mu-1) \\ + (N-1)(\tilde{N}-1)d(3)$$

mit $d(3) = (k-2\mu + [\frac{1}{2}(\mu+1)])(k-\mu - [\frac{1}{2}(\mu+1)])_+$ und

$$(2.1.2) \quad \dim S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) = \eta(k) + (3N+3\tilde{N}-4)\eta(k-\mu-1) + \\ + N\tilde{N}\eta(k-2\mu-2) + (N-1)(\tilde{N}-1)d(4)$$

mit $d(4) = \frac{1}{2}(k-\mu - [\frac{1}{3}(\mu+1)])(3k-5\mu+3[\frac{1}{3}(\mu+1)]+1)_+$.

2.2. Erzeugendensysteme von Splineräumen

Nach der Bestimmung der Dimension eines Splineriums ist man vor allem an einer Basis interessiert. Im allgemeinen Fall ist ihre Bestimmung sehr schwierig und bislang nur für

$S_1^0(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$, $S_3^1(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$, $S_4^2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ und $S_2^1(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$ bekannt. In Ka-

pitel 3 werden diese Ergebnisse auf ganze Klassen von Splineräumen ausgedehnt. Manchmal genügt es, ein Erzeugendensystem zu kennen. Dies ist insbesondere bei der Bestimmung der Approximationsordnung ausreichend.

Zunächst wollen wir die Triangulation $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ zugrundelegen.

$S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ kann dann als Summe von drei Unterräumen geschrieben werden. Der erste wird von gewissen Boxsplines aufgespannt. Der zweite besteht aus Linearkombinationen von abgeschnittenen Potenzfunktionen, deren Träger eine Halbebene ist. Explizit lauten sie

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} T_{1,1,r}(x,y) &= x^{1-r} y_+^r \\ T_{2,1,r}(x,y) &= y^{1-r} x_+^r \\ T_{3,1,r}(x,y) &= (x+y)^{1-r} (x-y)_+^r, \quad 1 \geq r. \end{aligned}$$

$T_{v,1,r}$ hat den Grad 1 und ist aus $C^{r-1}(\mathbb{R}^2)$. Den dritten Unterraum bilden die Polynome $\mathbb{P}_k$. Wir können nun ein Erzeugendensystem für $S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ angeben.

Satz 2.2.1 [21, Theorem 2]:

Es sei $\Omega = (0,N) \times (0,\tilde{N})$. Dann gilt

$$1. (2.2.2) \quad S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) = \{s|_\Omega : s \in S_k^\mu(\Delta^{(1)})\}$$

$$2. (2.2.3) \quad S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) = S + T + \mathbb{P}_k, \quad \text{wobei}$$

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} S &:= \text{span}(\tau_{jB_{E_{1,v}}} : j=1, \dots, 3(1-\mu) - 1 - 1; \\ &\quad 1 \leq k, j \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{jB_{E_{1,v}}} \cap \Omega \neq \emptyset) \end{aligned}$$

Die Mengen $E_{1,v}$ sind dabei folgendermaßen definiert. Für

festes $1 \leq k$ sei $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{3(1-\mu)_+}^{(1)}) := (e_1 : 1-\mu, e_1+e_2 : 1-\mu, e_2 : 1-\mu)$. Dann ist $E_{1,v} := (\xi_v^{(1)}, \dots, \xi_{v+1}^{(1)})$,

$v = 1, \dots, 3(1-\mu) - 1 - 1$.

$$(2.2.5) \quad \begin{aligned} T &:= \text{span}(\tau_{oj} T_{1,1,r}, j=0, \dots, \tilde{N}-1; \tau_{io} T_{2,1,r}, \\ i &= 0, \dots, N-1; \tau_{io} T_{3,1,r}, i = -\tilde{N}, \dots, N-1; \mu < r \leq 1 \leq k). \end{aligned}$$

Man beachte $|E_{1,v}| = 1+2$, weshalb die Boxsplines $B_{E_{1,v}}$ den Grad 1 haben. Die Mengen $E_{1,v}$ erfüllen die Bedingungen

(1.2.6), damit $B_{\Xi_{1,v}}$ die Glattheit μ hat. Die Mengen $\Xi_{1,v}$ existieren nur dann, wenn $3(1-\mu) - 1 - 1 \geq 1$ ist, oder äquivalent dazu $\mu(1) \geq \mu$ mit

$$(2.2.6) \quad \mu(1) := \left\lceil \frac{21-2}{3} \right\rceil .$$

Falls $\mu > \mu(h)$, ist $S = \{0\}$. Es lassen sich folgende Äquivalenzen zeigen.

Satz 2.2.2 [21]: Folgende Aussagen sind äquivalent.

- a. $\mu \leq \mu(k)$
- b. Es gibt einen Boxspline $B_{r,s,t}$ mit einem Grad $\leq k$ und der Glattheit μ .
- c. Es gibt einen Conespline $C_{r,s,t}$ mit einem Grad $\leq k$ und der Glattheit μ .
- d. Es gibt einen nichttrivialen Spline auf der durch $\mathbb{R}_+e_1, \mathbb{R}_+e_2, \mathbb{R}_+(e_1+e_2)$ induzierten Zerlegung, dessen Träger in $\mathbb{R}_+^2$ liegt.
- e. Für $d(3)$ in (2.1.1) gilt $d(3) \geq 1$.

Wir wollen noch anmerken, daß die Anzahl der $\Xi_{1,v}$ in (2.2.4) sich folgendermaßen ergibt (beachte

$$3(1-\mu)-1-1 \geq 1 \iff 1 \geq \frac{3\mu+2}{2} \iff 1 \geq \left\lceil \frac{3\mu+3}{2} \right\rceil$$

$$\begin{aligned} \sum_{1=0}^k (3(1-\mu)-1-1)_+ &= \sum_{1=\lceil \frac{3\mu+3}{2} \rceil}^k (21-3\mu-1) = \\ &= \left(k(k+1) - \left\lceil \frac{3\mu+1}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{3\mu+3}{2} \right\rceil \right)_+ - (3\mu+1) \left(k - \left\lceil \frac{3\mu+1}{2} \right\rceil \right)_+ = d(3) . \end{aligned}$$

Ist $\mu = \mu(k) = \left\lceil \frac{2k-2}{3} \right\rceil$, so sprechen wir von maximaler Glattheit. Dies ist die maximale Glattheit μ bei festem k , so daß es Splines mit kompaktem Träger gibt. Man beachte, daß die maximale Glattheit in zwei Dimensionen im Gegensatz zum eindimensionalen Fall kleiner als $k-1$ sein kann. Je nach der

Teilbarkeitseigenschaft von k durch drei erhält man drei Fälle.

1. Fall: $k = 3r-2$. Dann ist $\mu(k) = 2r-2$ und $d(3)$ in (2.1.1) gleich 1.
2. Fall: $k = 3r$, $\mu(k) = 2r-1$, $d(3) = 2$.
3. Fall: $k = 3r-1$, $\mu(k) = 2r-2$, $d(3) = 4$.

Diese Fälle führen zu den Splineklassen $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$, $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$ und $S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$, die in Abschnitt 2.4 und in den Kapiteln 3 und 4 näher untersucht werden. Es ergeben sich ähnliche Resultate innerhalb einer Splineklasse, jedoch unterschiedliche in den verschiedenen Klassen. Im Gegensatz zur eindimensionalen Theorie zeichnet sich die zweidimensionale durch eine besondere Vielfalt aus. Über die restlichen Splineräume mit einer Glattheit zwischen 1 und $\mu(k)$ ist noch wenig bekannt.

Eine ähnliche Aussage wie Satz 2.2.1 kann auch für $S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$ angegeben werden (vgl. [57,67]). Es sei wie in (2.2.1)

$$(2.2.7) \quad T_{4,1,r}(x,y) = (x-y)^{1-r} (x+y)_+^r, \quad 1 \geq r.$$

Satz 2.2.3: Es sei $\Omega = (O,N) \times (O,\tilde{N})$. Dann gilt:

$$1. (2.2.8) \quad S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) = \{s|_\Omega : s \in S_k^\mu(\Delta^{(2)})\}$$

$$2. (2.2.9) \quad S_k^\mu(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) = S + T + \mathbb{P}_k, \quad \text{wobei} \\ S = S_1 + S_2 \quad \text{mit}$$

$$(2.2.10) \quad S_1 = \text{span}(\tau_{ij}^{B_{\Xi}(1)} : v = 1, \dots, 4(1-\mu)-1-1; \\ 1 \leq k; (i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{\Xi}(1)} \cap \Omega \neq \emptyset) \\ 1, v$$

$$(2.2.11) \quad S_2 = \text{span}(\tau_{ij}^{B_{\Xi}(2)} : v = 1, \dots, 2(1-\mu)-1-1; \\ 1, v) \\ 1 \leq k, (i,j) \in \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{\Xi}(2)} \cap \Omega \neq \emptyset).$$

Die Mengen $\Xi_{1,v}^{(1)}$ ergeben sich folgendermaßen: Für festes $1 \leq k$ sei $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{4(1-\mu)+}^{(1)}) := (e_1 - e_2 : 1-\mu, e_1 : 1-\mu, e_1 + e_2 : 1-\mu, e_2 : 1-\mu)$ und $\Xi_{1,v}^{(1)} := (\xi_v^{(1)}, \dots, \xi_{v+1+1}^{(1)})$, $v = 1, \dots, 4(1-\mu) - 1 - 1$. Ebenso $(\zeta_1^{(1)}, \dots, \zeta_{2(1-\mu)+}^{(1)}) := (e_1 - e_2 : 1-\mu, e_1 + e_2 : 1-\mu)$ und $\Xi_{1,v}^{(2)} := (\zeta_v^{(1)}, \dots, \zeta_{v+1+1}^{(1)})$, $v = 1, \dots, 2(1-\mu) - 1 - 1$.

$$(2.2.12) \quad T := \text{span}(\tau_{0j} T_{1,1,r}, j=0, \dots, \tilde{N}-1; \tau_{io} T_{2,1,r}, i=0, \dots, N-1; \tau_{io} T_{3,1,r}, i=-\tilde{N}, \dots, N-1; \tau_{io} T_{4,1,r}, i=0, \dots, N+\tilde{N}-1; \mu < r \leq 1 \leq k).$$

Auch hier gelten ähnliche Bemerkungen wie bei $\Delta^{(1)}$. Die Anzahl der verschiedenen Mengen $\Xi_{1,v}^{(1)}$ ist $d(4)$ aus (2.1.2), die der $\Xi_{1,v}^{(2)}$.

$$(2.2.13) \quad d(2) = \frac{1}{2}(k-2\mu)(k-2\mu-1)_+.$$

$\mu(k) = \left\lfloor \frac{3k-2}{4} \right\rfloor$ heißt auch hier maximale Glattheit. Hier gibt es vier Fälle.

1. Fall: $k = 4r-2, \mu(k) = 3r-2, d(4) = 1$.
2. Fall: $k = 4r+1, \mu(k) = 3r, d(4) = 2$.
3. Fall: $k = 4r, \mu(k) = 3r-1, d(4) = 3$.
4. Fall: $k = 4r-1, \mu(k) = 3r-2, d(4) = 5$.

In allen Fällen ist $d(2) = 0$. Die vier Splineklassen $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$, $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$, $S_{4r}^{3r-1}(\Delta^{(2)})$ und $S_{4r-1}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ werden in den Kapiteln 3 und 4 näher untersucht.

2.3 Approximation in Splineräumen

Eine der wichtigsten und schwierigsten Probleme der mehrdimensionalen Splines ist die Bestimmung der Approximationsordnung [2,5,6,15,17,19,20,21,23,24,25,26,52,55,57,64,65,

67,82,88,89,90,95,98,100,102,103,112,115,121,132,133]. Wir wollen hier speziell die gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen auf $I \times I$ ($I := [0,1]$) betrachten. Sei S ein Spliner Raum, der die Gitterlänge 1 habe und dessen Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert seien. Wir suchen dann nach Approximationen aus

$$(2.3.1) \quad S_h := \{s(\frac{\cdot}{h})|_{I \times I} : s \in S\}.$$

Insbesondere sind wir für $f \in C(I \times I)$ an

$$(2.3.2) \quad \text{dist}(f, S_h) := \inf_{s \in S_h} \|f - s\|_{I \times I}$$

interessiert. Wir vereinbaren ([17])

Definition 2.3.1: S sei ein Spliner Raum.

S hat die (exakte) Approximationsordnung $m : \Leftrightarrow$

$$(i)_m \quad \text{dist}(f, S_h) = O(h^m) \quad \forall f \in C^\infty(I \times I),$$

$$(ii)_m \quad \exists f \in C^\infty(I \times I) : \text{dist}(f, S_h) \neq o(h^m).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Approximationsordnung der Spliner Räume $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$ durch die der Boxsplines gegeben ist (vgl. [21,67]).

Satz 2.3.1: S sei der nach (2.2.4) zu $S_k^\mu(\Delta_{N,N}^{(1)})$ bzw. der nach (2.2.10) zu $S_k^\mu(\Delta_{N,N}^{(2)})$ gehörige Spann seiner Boxsplines. Dann ist die (exakte) Approximationsordnung von S gleich der von $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$, $v = 1, 2$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage nur für $\Delta^{(1)}$ (für $\Delta^{(2)}$ analog). Klar ist, daß die Approximationsordnung von S kleiner oder gleich der von $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$ ist. Der Satz ist bewiesen, wenn wir folgende Behauptung gezeigt haben:

$$(2.3.3) \quad \forall f \in C^\infty(I \times I) : \inf_{s \in (S_k^\mu(\Delta^{(1)}))_h} \|f - s\|_{I \times I} = O(h^m)$$

$$\Rightarrow \forall f \in C^\infty(I \times I) : \inf_{s \in S_h} \|f - s\|_{I \times I} = O(h^m).$$

Beweis von (2.3.3): Es sei $f \in C^\infty(I \times I)$. Definiere $\Omega_1 := [-\frac{1}{2}, 1]^2$, $\Omega_2 := [-4k-4, 1]^2$. Für $N \in \mathbb{N}$ werde auf $I \times I$ eine Triangulation vom Typ 1 mit der Gitterlänge h induziert. Nach [134, Theorem I] hat f eine Fortsetzung $F \in C^\infty(\Omega_2)$. Es sei $\varphi \in C^\infty(\Omega_2)$ mit $\text{supp } \varphi \subset \Omega_1$ und $\varphi(z) = 1$ für alle $z \in I \times I$. Dann ist $\tilde{f} := F\varphi \in C^\infty(\Omega_2)$ eine Funktion, die in $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ verschwindet und auf $I \times I$ mit f übereinstimmt. Definiere nun den Differenzenoperator

$$(2.3.4) \quad \Gamma_k := (1 - \tau_{2e_1})^{k+1} (1 - \tau_{2e_2})^{k+1} (1 - \tau_{2(e_1+e_2)})^{k+1}$$

Für ihn gilt nun $\Gamma_k \tilde{f}(z) = f(z) \quad \forall z \in I \times I$, $\Gamma_k s = 0$ $\forall s \in T_h + \mathbb{P}_k$ (T wie in (2.2.5)) und $\Gamma_k s$ ist für alle Boxsplines s eine Linearkombination von Boxsplines. Wir wenden nun die Voraussetzung von (2.3.3) auf $\tilde{f}$ an, wobei wir statt $I \times I$ auch das dazu affin äquivalente Ω_2 nehmen können. Dann existieren $s_h \in (S_k^\mu(\Delta^{(1)}))_h$ mit $0(h^m) = \|\tilde{f} - s_h\|_{\Omega_2}$, womit $\|f - \Gamma_k s_h\|_{I \times I} = \|\Gamma_k(\tilde{f} - s_h)\|_{I \times I} \leq C \|\tilde{f} - s_h\|_{\Omega_2} = 0(h^m)$ mit $\Gamma_k s_h \in S_h$ folgt. q.e.d.

Anmerkung: Man beachte, daß wir nicht

$$\inf_{S \in (S_k^\mu(\Delta^{(1)}))_h} \|f - s\|_{I \times I} = 0(h^m) \Rightarrow \inf_{s \in S_h} \|f - s\|_{I \times I} = 0(h^m)$$

bewiesen haben. Diese Aussage ist für gewisse glatte f sogar falsch. Wir werden sehen, daß sich spezielle glatte Funktionen (wie z.B. $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$) besser approximieren lassen, als die Allgemeinheit der $f \in C^\infty(I \times I)$. Dies ist ein bedeutender Unterschied zur eindimensionalen Theorie, in der alle dieselbe optimale Konvergenzordnung besitzen, sofern sie nur genügend glatt sind. Für $v = 1, 2$ und $\mu > \mu(k)$ ergibt Satz 2.3.1 sofort, daß $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$ die Approximationsordnung 0 hat, obwohl $\mu \leq k-1$ ist. Natürlich lassen sich die speziellen Funktionen $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x-y)$ für $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty$ mit der Ordnung $k+1$

approximieren. Satz 2.3.1 kann so gedeutet werden, daß nur der "lokale Teil" eines Splineraumes für die Approximation von Bedeutung ist (vgl. [17]).

Satz 2.3.1 legt nun nahe, ein allgemeineres Approximationsproblem zu lösen. Sei $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ ein System von Funktionen ϕ_v mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^m$. Dazu definiere man

(2.3.5) $S_h(\phi) = \text{span}(\phi_v(\frac{\cdot}{h} - \alpha) : v = 1, \dots, M, \alpha \in \mathbb{Z}^m)$ und betrachte Approximationen in $S_h(\phi)$. Dieses Problem wurde schon in [132, 133] behandelt. Durch die Einführung von Boxsplines wurde es weiter untersucht [5, 6, 17, 24, 57, 65, 67, 100, 102]. Zur Lösung wurde der Begriff der kontrollierten Approximation eingeführt und durch mehrere äquivalente Bedingungen charakterisiert. Kürzlich wurde aufgezeigt, daß in [132, 133] ein Beweis dazu fehlt, und auch ein Gegenbeispiel gefunden [102].

In [24] wurden schließlich geeignete Bedingungen formuliert und deren Äquivalenz bewiesen. Deshalb werden wir uns an [24] anlehnen. Dort wurde das Prinzip der kontrollierten Approximation durch das der lokalen Approximation ersetzt. Für

$1 \leq p \leq \infty$ sei $\|f\|_p := \|f\|_{0,p} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^m)}$ die übliche Norm in

$L_p(\mathbb{R}^m)$ (siehe [1]), $\|f\|_{j,p} := \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_p$,

$\|f\|_{1,p} := \sum_{j \leq 1} \|f\|_{j,p}$ und der Sobolevraum

$W_p^1(\mathbb{R}^m) := \{f \text{ Distribution auf } \mathbb{R}^m : \|f\|_{1,p} < \infty\}$.

Ferner sei $W_{p,c}^1(\mathbb{R}^m) := \{f \in W_p^1(\mathbb{R}^m) : \text{supp } f \text{ kompakt}\}$.

Für $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ sei $f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\xi x} f(x) dx$

die Fouriertransformierte.

Definition 2.3.2: ϕ erlaubt lokale L_p -Approximation der Ordnung 1 : $\Leftrightarrow$ Es gibt $c, R > 0$:

Für alle $f \in W_p^1(\mathbb{R}^m)$ und alle $h > 0$ gibt es $(c_v^h(j))_{v=1, \dots, M, j \in \mathbb{Z}^m}$ mit

$$(2.3.5a) \quad \|f - \sum_{v=1}^M \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} c_v^h(j) \varphi_v(\cdot - j)\|_p \leq \\ \leq c h^1 \|f\|_{1,p}$$

$$(2.3.5b) \quad c_v^h(j) = 0 \quad \text{falls } \text{dist}(jh, \text{supp } f) > R.$$

Nach [24, Theorem] können folgende Äquivalenzen formuliert werden:

Satz 2.3.2: Es sei $\phi \in W_{p,c}^0(\mathbb{R}^m)$ endlich. Dann sind folgende fünf Aussagen äquivalent:

1. Es gibt $(\psi_\alpha : |\alpha| < 1) \subset \text{span } \phi$ mit

$$(2.3.6a) \quad \hat{\psi}_0(0) = 1, \quad \hat{\psi}_0(z) = 0 \quad \forall z \in 2\pi\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$$

$$(2.3.6b) \quad \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{(-iD)^\beta}{\beta!} \hat{\psi}_{\alpha-\beta}(z) = 0 \quad \forall z \in 2\pi\mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, \\ 0 < |\alpha| < 1.$$

2. Es gibt $(\psi_\alpha : |\alpha| < 1) \subset \text{span } \phi$ mit

$$(2.3.7) \quad q(z) := \frac{z^\alpha}{\alpha!} - \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \frac{j^\beta}{\beta!} \psi_{\alpha-\beta}(z-j) \in \mathbb{P}_{|\alpha|-1} \\ \text{falls } |\alpha| < 1.$$

3. Es gibt $\Lambda \subset \mathbb{Z}^m$ endlich und $c_v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} (v=1, \dots, M)$:

$$\text{Für } \psi := \sum_{v=1}^M \sum_{j \in \Lambda} c_v(j) \varphi_v(\cdot - j) \text{ gilt}$$

$$(2.3.8) \quad q(z) := z^\alpha - \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} j^\alpha \psi(z-j) \in \mathbb{P}_{|\alpha|-1} \\ \text{falls } |\alpha| < 1.$$

4. Für alle $1 \leq p \leq \infty$ erlaubt ϕ lokale L_p -Approximation der Ordnung 1.

5. Es gibt $1 \leq p \leq \infty$, so daß ϕ lokale L_p -Approximation der Ordnung 1 zuläßt.

Die Fouriertransformation eines Boxsplines ist relativ einfach. Ist $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^m$, und sei

$$(2.3.9) \quad \rho(z) := \hat{\chi}_I(z) = \frac{1-e^{-iz}}{iz}, \quad z \in \mathbb{R} : \\ (\rho(0) = 1, \rho(2\pi z) = 0 \text{ für } z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

so ist

$$(2.3.10) \quad \hat{B}_E(z) = \prod_{v=1}^n \rho(\xi_v z).$$

Dabei ist $\xi_v z$ das innere Produkt von ξ_v und z . Speziell

$$(2.3.11) \quad \hat{B}_{r,s,t,v}(x,y) = x^r y^s (x+y)^t (x-y)^v.$$

Man kann nun relativ leicht die Bedingungen 1 oder 3 von Satz 2.3.2 mit $l = d(E) + 1$ für $\phi = \{B_E\}$ verifizieren. Daher

$$(2.3.12) \quad \text{dist}(f, (S(E))_h) = O(h^{d(E)+1}) \\ \forall f \in C^{d(E)+1}(I \times I).$$

In der Literatur wird das maximale l , das den Bedingungen von Satz 2.3.2 genügt, oft als exakte kontrollierte Approximationsordnung bezeichnet [5,65,67]. Diese ist jedoch nur eine untere Schranke für die wahre (exakte) Approximationsordnung. Für dieses l kann ein Verfahren (nämlich eine Quasi-interpolierende) angegeben werden, das die Ordnung l hat. Für einige Splineräume wurde dieses maximale l bestimmt [5,65,67]. Die wahre Approximationsordnung kann jedoch größer sein, wie das Beispiel in Abschnitt 4.1 zeigt. Deshalb sind neue Methoden erforderlich, die obere Schranken für die Approximationsordnung liefern. Dazu benötigen wir

Satz 2.3.3 (Markovsche Ungleichung):

Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\|D_z q\|_{h\Gamma} \leq \frac{C}{h} \|q\|_{h\Gamma}$$

für alle $h > 0$ und $q \in \mathbb{P}_k$.

Beweis: Für $\alpha > 0$ ist $P_\alpha := \{p|_{\alpha\Gamma} : p \in \mathbb{P}_k\}$ ein endlichdimensionaler Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|_{\alpha\Gamma}$. Da $D_z : P_1 \rightarrow P_1$ ein

beschränkter linearer Operator ist, gibt es $C > 0$ mit

$$(*) \quad \|D_z p\|_{\Gamma} \leq C \|p\|_{\Gamma} \quad \forall p \in P_1.$$

Zu $q \in P_h$ gibt es $p \in P_1$ mit $q(hu) = p(u)$ für alle $u \in \Gamma$ und somit $D_z p(u) = h(D_z q)(uh)$, weshalb aufgrund von $(*)$ sofort die Behauptung folgt. q.e.d.

Eine wichtige Folgerung ist

Satz 2.3.4: Es sei S ein Splineraum vom Grad k auf einem regulären Gitter (z.B. $\Delta^{(v)}$, $v = 0, 1, 2$) und Z eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

a. Ist $n \leq k + 1$, $|Z| < n$ und $s_h \in S_h$ mit

$$\|f - s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^n), \text{ wobei } f \in C^n(I \times I), \text{ so ist}$$

$$\|D_z f - D_z s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^{n-|Z|}).$$

b. Ist $n \leq k$, $|Z| \leq n$ und $s_h \in S_h$ mit $\|f - s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = o(h^n)$,

$$\text{wobei } f \in C^{n+1}(I \times I), \text{ so ist } \|D_z f - D_z s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = o(h^{n-|Z|}).$$

Beweis: a. Sei ohne Einschränkung $Z = \{z\}$ mit $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Nach [55, 74, 75, 76, 127, Theorem 13.20] gibt es $p_h \in S_k^{-1}$ (d.h. auf jedem Teilgebiet der Zerlegung Polynome aus $\mathbb{P}_k$, die dann ohne Stetigkeitsforderung zu einer Funktion p_h zusammengesetzt werden) mit

$$\|f - p_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^n) \text{ und } \|D_z f - D_z p_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^{n-1}).$$

Deshalb ist $\|p_h - s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^n)$, und

durch Anwendung von Satz 2.3.3 auf $\|D_z(p_h - s_h)\|_{L_{\infty}(I \times I)}$

$$\text{folgt } \|D_z f - D_z s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} \leq \|D_z f - D_z p_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} +$$

$$+ \|D_z(p_h - s_h)\|_{L_{\infty}(I \times I)} \leq O(h^{n-1}) + \frac{C}{h} \|p_h - s_h\|_{L_{\infty}(I \times I)} = O(h^{n-1}).$$

Teil b läßt sich analog beweisen.

q.e.d.

Anmerkung: Die Ableitungen von Splines $D_z s_h$ sind auf jedem

offenen Teilgebiet der Zerlegung zu bilden und brauchen in den Gitterlinien nicht zu existieren. Sie sind also nur fast überall definiert. In diesem Sinn ist auch die Norm in $L_\infty(I \times I)$ zu verstehen.

Wir können nun eine obere Schranke für die Approximationsordnung angeben, wie sie für $\Delta^{(1)}$ in [21] gefunden wurde.

Satz 2.3.5: Eine obere Schranke für die Approximationsordnung in $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$ ist $m_1(k, \mu) := \min(k+1, 2(k-\mu))$ und in $S_k^\mu(\Delta^{(2)})$ $m_2(k, \mu) := \min(k+1, 3(k-\mu))$.

Beweis: Wir nehmen an, daß es $s_h \in (S_k^\mu(\Delta^{(1)}))$ gebe mit $\|f - s_h\|_{I \times I} = o(h^{2(k-\mu)})$, wobei $f \in C^\infty(I \times I)$. Nach Satz 2.3.1 kann man s_h als Linearkombination der Boxsplines in (2.2.4) annehmen. Die erste und zweite Richtung tritt bei ihnen höchstens $k-\mu$ mal auf, weshalb $D_{k-\mu, k-\mu} s_h = 0$ f.ü. Satz 2.3.4 ergibt daher $\|D_{k-\mu, k-\mu} f\|_{L_\infty(I \times I)} = o(1)$, also $D_{k-\mu, k-\mu} f = 0$. Es gibt aber $f \in C^\infty(I \times I)$, für die dies nicht gilt, wonach die Annahme falsch ist. Ebenso ergibt sich die Behauptung für $\Delta^{(2)}$ mit dem Differentialoperator $D_{k-\mu, k-\mu, k-\mu}$ und den Boxsplines in (2.2.10). q.e.d.

Unser nächstes Ziel ist es, möglichst gute untere und obere Schranken für die Approximationsordnung der $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$ anzugeben. Eine einfache untere Schranke kann leicht gefunden werden.

Satz 2.3.6: Für $v = 1, 2$ und $\mu \leq \mu(k)$ ist $\mu + 2$ eine untere Schranke für die Approximationsordnung von $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$.

Beweis: Dies ergibt sich sofort aus (2.3.12) und (1.4.14)

q.e.d.

Im Fall $\Delta^{(1)}$ wurde in [98, Theorem 4] eine Verbesserung angegeben.

Satz 2.3.7: Für $\mu \leq \mu(k)$ ist $m_1(k, \mu) - 2$ eine untere Schranke für die Approximationsordnung von $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$.

Falls $k = 2\mu + 2$ ist gilt sogar [98, Theorem 3]

Satz 2.3.8: $2\mu + 2$ ist eine untere Schranke für die Approximationsordnung von $S_{2\mu+2}^\mu(\Delta^{(1)})$.

In Abschnitt 4.7 werden wir zeigen, daß $2\mu + 2$ sogar exakt ist. Es stellt sich heraus, daß die oberen Schranken $m_\nu(k, \mu)$ nicht scharf sind, weshalb neue Methoden erforderlich sind. Eine Möglichkeit ist

Satz 2.3.9 [127, Lemma 2.75, Seite 72]: X sei ein normierter linearer Raum mit der Norm $\|\cdot\|$ und X_n ein endlichdimensionaler Teilraum. λ sei ein stetiges lineares Funktional auf X mit $\lambda\varphi = 0$ für alle $\varphi \in X_n$. Dann ist

$$\text{dist}(f, X_n) := \inf_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\| \geq \frac{|\lambda f|}{\|\lambda\|}$$

für alle $f \in X$.

Ein wichtiges Beispiel, für das $m_1(k, \mu)$ größer als die wahre Approximationsordnung ist, ist $S_3^1(\Delta^{(1)})$. Nach (2.3.12) erlaubt jeder der beiden Boxsplines $B_{2,1,2}$ und $B_{1,2,2}$ (nach Satz 3.2.2 und Satz 2.4.2 ist

$S_3^1(\Delta_{N,N}^{(1)}) = \text{span}(\tau_{ij} B_{2,1,2}, \tau_{ij} B_{1,2,2})$ eine Approximation der Ordnung 3. Wegen $m_1(3, 1) = 4$ wäre sowohl 3 als auch 4 als Approximationsordnung möglich. In [20] wird ein lineares

Funktional konstruiert, das den Splineraum annihilert, und aufgrund von Satz 2.3.9 ergibt sich für eine glatte Funktion f die Ordnung 3. In Kapitel 4 wird ein ähnliches Funktional konstruiert, wobei sich zeigt, daß der Erfolg der Methode im wesentlichen auf dem Peanokerntheorem basiert. Dies kann auch durch Umformulierung für das Beispiel in [20] gezeigt werden. Für allgemeinere Splineräume ist es jedoch nicht möglich, Funktionale wie in Satz 2.3.9 anzugeben, die auf die richtige Ordnung führen. In Kapitel 4 geben wir für bestimmte Klassen von Splineräumen neue Verfahren an, die zu oberen Schranken führen, die mit den unteren übereinstimmen. Inzwischen ist auch von Jia in [103] für die Fälle $S_k^\mu(\Delta^{(1)})$ mit $3 \leq 2k - 3\mu \leq 7$ eine obere Schranke gefunden worden. Für bestimmte Fälle, in denen genau ein Boxspline existiert, können wir schon ein genaues Ergebnis angeben.

Satz 2.3.10: Für $r \in \mathbb{N}$ ist die Approximationsordnung von $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$ $2r$ und die von $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ $3r$.

Beweis: Die Sätze 2.3.5 und 2.3.6 ergeben wegen $\mu + 2 = m_v(k, \mu)$, $v = 1, 2$, die Behauptung. q.e.d.

Bei der Approximation von Funktionen $f \in C^\infty(I \times I)$ durch Splines aus $(S_k^\mu(\Delta^{(v)}))_h$ haben wir gesehen, daß es eine obere Schranke für die Approximationsordnung geben kann, die kleiner als $k+1$ ist. Für echte Teilräume von $C^\infty(I \times I)$ kann sie allerdings größer als diese Schranke sein. Speziell Funktionen aus $W \cap C^\infty(I \times I)$ mit

$$(2.3.13) \quad W = \{f(x, y) = f_1(x) + f_2(y) : f_1, f_2 \in C(I)\}$$

lassen sich mit der Ordnung $k+1$ annähern. W ist ein abgeschlossener und proximaler Teilraum von $C(I \times I)$ bezüglich der Supremumsnorm. In [73] wurde ein Algorithmus angegeben, der eine Folge in W konstruiert, die gegen das

Proximum einer Funktion $f \in C(I \times I)$ konvergiert. Eine Verallgemeinerung von (2.3.13) ist

$$(2.3.14) \quad W = \mathbb{P}_1 \otimes C(I) + C(I) \otimes \mathbb{P}_1 := \\ = \left\{ \sum_{i=1}^1 f_i(y) x^i + \sum_{j=1}^1 g_j(x) y^j : \right. \\ \left. f_1, \dots, f_1, g_1, \dots, g_1 \in C(I) \right\}, \quad 1 \in \mathbb{N}_0,$$

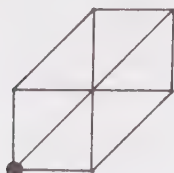
das auch in $C(I \times I)$ abgeschlossen ist. Für eine weitergehende Untersuchung dieser Räume siehe [31, 107, 108].

2.4 Spezielle Splineräume auf der Triangulation vom Typ 1

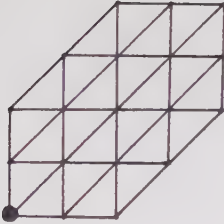
Für die Splineräume auf $\Delta^{(1)}$ mit maximaler Glattheit, bei denen ein oder zwei Boxsplines existieren, werden die Splines mit minimalem Träger beschrieben. Diese spannen denselben Raum wie die Boxsplines auf und können gemäß Satz 1.2.2 als neue polyedrische Splines aufgefaßt werden. Im Raum $S_3^1(\Delta^{(1)})$ wurden sie zuerst in [81] aufgeführt und in [21] im Zusammenhang mit $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$ näher untersucht.

$$2.4.1 \quad \underline{S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})}, \quad r \in \mathbb{N}$$

Wegen $d(3) = 1$ (in (2.1.1)) gibt es nach Satz 2.2.1 genau einen Boxspline, nämlich $B_{r,r,r}$. Für $r=1$ ist dieser das Courantsche Element, das auf jedem Dreieck linear ist, in einem Knoten den Wert 1 annimmt und in allen anderen 0 ist.



Träger von $B_{1,1,1} \in S_1^0(\Delta^{(1)})$



Träger von $B_{2,2,2} \in S_4^2(\Delta^{(1)})$

● Nullpunkt

Es stellt sich nun die Frage, ob es in $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$ Elemente gibt, die einen kleineren Träger als $B_{r,r,r}$ haben. Dazu definieren wir

Definition 2.4.1: S sei ein Splineraum.

- a. f hat minimalen Träger in S : $\iff$
 $f \in S, (g \in S : \text{supp } g \subset \text{supp } f \text{ und } \text{supp } g \neq \text{supp } f \Rightarrow g = 0)$.
- b. f hat eindeutigen minimalen Träger in S : $\iff$
 $f \in S, (g \in S : \text{supp } g \subset \text{supp } f \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : g = \alpha f)$

Es ist klar, daß ein Element minimalen Träger hat, wenn es einen eindeutigen minimalen Träger hat. Nach [21, Theorem 4.1] gilt

Satz 2.4.1: Für $r \in \mathbb{N}$ hat der Boxspline $B_{r,r,r}$ eindeutigen minimalen Träger in $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$.

Nach Satz 2.3.10 beträgt die Approximationsordnung von $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$ $2r$.

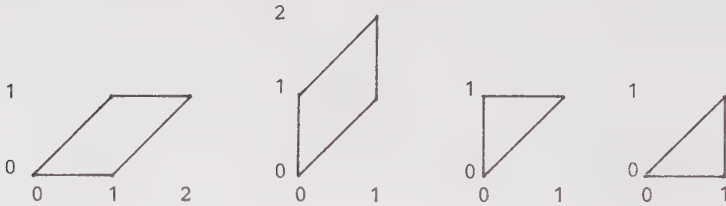
2.4.2 $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)}), r \in \mathbb{N}$

Satz 2.2.1 liefert uns die zwei Boxsplines $B_{r+1,r,r+1}$ und $B_{r,r+1,r+1}$ ($d(3) = 2$). Aufgrund von $B_{r+1,r,r+1} = B_{1,0,1} * B_{r,r,r}$ und $B_{r,r+1,r+1} = B_{0,1,1} * B_{r,r,r}$ liegt es nahe, $B_{1,0,1}$ und $B_{0,1,1} \in S_0^{-1}(\Delta^{(1)})$ durch χ_1 und χ_2 zu ersetzen, wobei

$\chi_1 :=$ charakteristische Funktion zum
Dreieck $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$

(2.4.1)

$\chi_2 :=$ charakteristische Funktion zum
Dreieck $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.



Träger von $B_{1,0,1}$

$B_{0,1,1}$

χ_1

χ_2

Wir definieren

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} B^1 &:= \chi_1 * B_{r,r,r} \\ B^2 &:= \chi_2 * B_{r,r,r} \end{aligned}$$

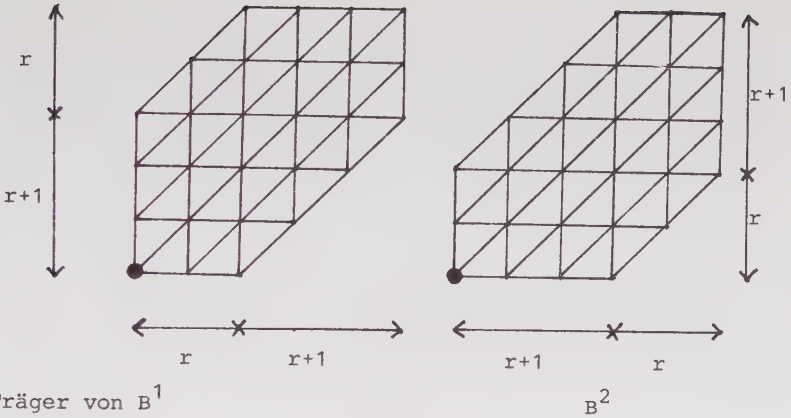


Träger von B^1

B^2

für $r=1$.

Die Splines B^1 und B^2 werden zuerst in [81] erwähnt.



Wir definieren nun die Mengen

$$J_1^{(1)} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{r+1, r, r+1}} \cap (0, N) \times (0, \tilde{N}) \neq \emptyset\}$$

$$J_2^{(1)} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{r, r+1, r+1}} \cap (0, N) \times (0, \tilde{N}) \neq \emptyset\}$$

$$J_v^{(2)} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_v} \cap (0, N) \times (0, \tilde{N}) \neq \emptyset\}, \quad v = 1, 2.$$

Es stellt sich heraus, daß die Boxsplines und B^1 , B^2 den gleichen Raum aufspannen.

Satz 2.4.2:

$$\begin{aligned} & \text{span } (\tau_{ij}^{B_{r+1, r, r+1}}|_{(0, N) \times (0, \tilde{N})} : (i, j) \in J_1^{(1)}, \\ & \tau_{ij}^{B_{r, r+1, r+1}}|_{(0, N) \times (0, \tilde{N})} : (i, j) \in J_2^{(1)}) \\ & = \text{span } (\tau_{ij}^{B_v}|_{(0, N) \times (0, \tilde{N})} : (i, j) \in J_v^{(2)}, \quad v = 1, 2) \end{aligned}$$

Beweis: " $\supset$ ": Aus $B_{1, 0, 1} = \chi_2 + \tau_{1, 0} \chi_1$ und

$B_{0, 1, 1} = \chi_1 + \tau_{0, 1} \chi_2$ folgt durch Faltung

$B_{r+1, r, r+1} = B^2 + \tau_{1, 0} B^1$, $B_{r, r+1, r+1} = B^1 + \tau_{0, 1} B^2$ und damit die Behauptung.

"c" : Durch Kombination der charakteristischen Funktionen

$$\text{folgt } \chi_1 = B_{0,1,1} - \tau_{0,1} B_{1,0,1} + \tau_{1,1} B_{0,1,1} - \tau_{1,2} B_{1,0,1} + \\ + \tau_{2,2} B_{0,1,1} - \tau_{2,3} B_{1,0,1} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{ii} B_{0,1,1} - \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{j-1,j} B_{1,0,1}.$$

Ebenso $\chi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{ii} B_{1,0,1} - \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{j,j-1} B_{0,1,1}$. Da wir nur ein beschränktes Gebiet betrachten und die Splines kompakten Träger haben, brechen die Summen ab. Durch Faltung

$$\text{folgt } B^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{ii} B_{r,r+1,r+1} - \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{j-1,j} B_{r+1,r,r+1} \quad \text{und}$$

$$B^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{ii} B_{r+1,r,r+1} - \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{j,j-1} B_{r,r+1,r+1} \quad \text{und damit}$$

die Behauptung. q.e.d.

$B_{r+1,r+1,r}$ ist ein weiterer Boxspline in $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$. Er kann jedoch durch die beiden anderen Boxsplines dargestellt werden. Nach [21, Theorem 4.2] gilt für B^1 und B^2 :

Satz 2.4.3: Die Splines $B^1 = \chi_1 * B_{r,r,r}$ und $B^2 = \chi_2 * B_{r,r,r}$ haben in $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$ eindeutigen minimalen Träger.

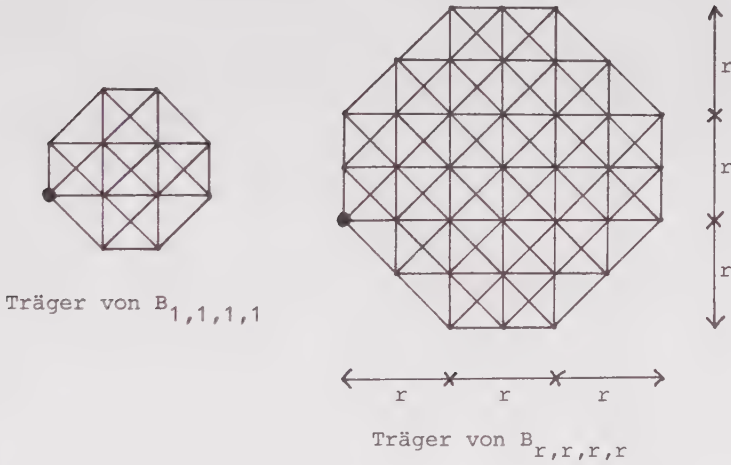
Nach Satz 2.3.6 ist $2r+1$ eine untere Schranke für die Approximationsordnung von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$. In Kapitel 4 werden wir zeigen, daß dies die exakte Approximationsordnung ist.

2.5 Spezielle Splineräume auf der Triangulation vom Typ 2

In den Splineräumen auf $\Delta^{(2)}$, die maximale Glattheit haben und in denen ein bzw. zwei Boxsplines existieren, werden die Elemente mit minimalem Träger konstruiert und der Beweis der Minimalität gegeben. Bei $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ führt dies zu neuen Splines mit kompakten Trägern.

2.5.1 $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)}), r \in \mathbb{N}$

Hier ist $d(4) = 1$ (in (2.1.2)), und nach Satz 2.2.3 ist $B_{r,r,r,r}$ der einzige Boxspline.



Wir zeigen nun ein neues Ergebnis, das analog zu Satz 2.4.1 ist.

Satz 2.5.1: Für $r \in \mathbb{N}$ hat der Boxspline $B_{r,r,r,r}$ eindeutigen minimalen Träger in $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$.

Der Beweis ist nur eine Modifikation von dem von Satz 2.4.1 [21, Theorem 4.1]. Zunächst benötigen wir

Lemma 2.5.1: Für $j \in \mathbb{N}_0$ seien $\Omega :=$

$\text{con}((0,0), (1,-1), (0,j), (1,j+1)),$

$\theta := \text{con}((0,j), (0,j+1), (1,j+1))$ und

$X := \{f|_{\Omega} : f \in S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)}), \text{supp } f \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \Omega\}.$

Dann ist $\dim X = (j+1-r)_+.$

Der Beweis verläuft analog zu Lemma 4.1 in [21]. Man beachte nur zusätzlich, daß es für $z \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ kein nichttriviales $s \in S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ gibt mit $\text{supp } s \subset z + \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \geq 0, x+y \geq 0\}$. Aus Lemma 2.5.1 läßt sich herleiten

Lemma 2.5.2: Ist $f \in S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ mit

$\text{supp } f \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq -r, x-y+r \geq 0,$

$x-y-3r+1 \leq 0, x+y \geq 0\}$, so ist $f = 0$.

Beweis: Wir definieren die Folge $(\Omega_{\rho})_{\rho \in \mathbb{N}}$ von Vierecken durch $\Omega_{1+4v} := (2+v, -2+v) + \text{con}((0,0), (1,-1), (r,-1), (r+1,0)), \Omega_{2+4v} := (v,v) + \text{con}((0,0), (r-1,1-r), (r,1-r), (0,1)), \Omega_{3+4v} := (v,v+1) + \text{con}((0,0), (1,-1), (1,r), (0,r-1)), \Omega_{4+4v} := (v+1,v) + \text{con}((0,0), (r-1,1-r), (r,1-r), (0,1)), v \in \mathbb{N}_0$. Man wende nun Lemma 2.5.1 mit $j = r-1$ sukzessive auf Ω_{ρ} , $\rho \in \mathbb{N}$ an. Deshalb $f|_{\Omega_{\rho}} = 0$, $\rho \in \mathbb{N}$ und damit $f = 0$. Damit ist Lemma 2.5.2 bewiesen.

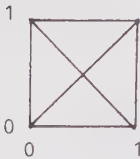
Beweis von Satz 2.5.1: Definiere $\Omega := \text{con}((2r-1,-r), (2r,-r), (3r,0), (3r,1))$. Es sei $g \in S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } g \subset \text{supp } B_{r,r,r,r}$. Durch Anwendung von Lemma 2.5.1 mit $j=r$ ergibt sich $g = c B_{r,r,r,r}$ auf Ω . Für $f := g - c B_{r,r,r,r}$ ist daher $\text{supp } f \subset \text{supp } B_{r,r,r,r} \setminus \Omega$. Wendet man Lemma 2.5.2 auf f an, folgt $f = 0$ und somit $g = c B_{r,r,r,r}$. q.e.d.

Nach Satz 2.3.10 ist $3r$ die exakte Approximationsordnung von $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$.

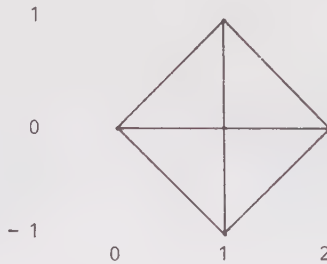
2.5.2 $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)}), r \in \mathbb{N}$

In diesem Splineraum ist $d(4) = 2((2.1.2))$, und Satz 2.2.3 nennt die Boxsplines $B_{r+1,r,r+1,r+1}$ und $B_{r+1,r+1,r+1,r}$. Stattdessen können wir auch die beiden Boxsplines $B_{r+1,r+1,r+1,r}$ und $B_{r+1,r+1,r,r+1}$ nehmen. Beachten wir $B_{r+1,r+1,r+1,r} = B_{1,1,1,0} * B_{r,r,r,r}$ und $B_{r+1,r+1,r,r+1} = B_{1,1,0,1} * B_{r,r,r,r}$ und $B_{1,1,1,1}, B_{1,1,0,1} \in S_1^0(\Delta^{(2)})$, so können wir die Träger der Boxsplines verkleinern, indem wir

$$(2.5.1) \quad B^1 := \eta_1 * B_{r,r,r,r}, \quad B^2 := \eta_2 * B_{r,r,r,r} \text{ einführen.}$$

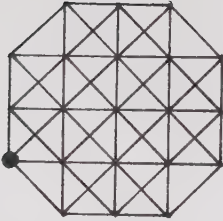


Träger von η_1

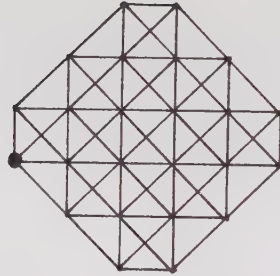


Träger von η_2

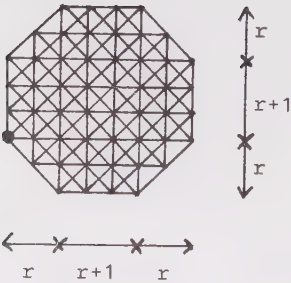
Dabei ist $\eta_1 \in S_1^0(\Delta^{(2)})$ mit $\eta_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ und $\eta_1(z) = 0$ in allen anderen Knoten z und $\eta_2 \in S_1^0(\Delta^{(2)})$ mit $\eta_2(1,0) = 1$ und $\eta_2(z) = 0$ in allen anderen Knoten z .



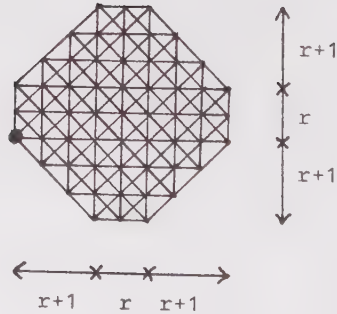
Träger von B^1



Träger von B^2 für $r=1$.



Träger von B^1



Träger von B^2

Wir führen folgende Mengen ein:

$$J_1^{(1)} := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{r+1, r+1, r+1, r} \cap (0, N) \times (0, \tilde{N}) \neq \emptyset\}$$

$$J_2^{(1)} := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{r+1, r+1, r, r+1} \cap (0, N) \times (0, N) \neq \emptyset\}$$

$$J_v^{(2)} := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_v \cap (0, N) \times (0, \tilde{N}) \neq \emptyset\}, \quad v = 1, 2.$$

Boxsplines und B^1 , B^2 erzeugen dann denselben Raum.

Satz 2.5.2:

$$\begin{aligned} & \text{span}(\tau_{ij}^{B_{r+1,r+1,r+1,r}} \mid (0,\mathbb{N}) \times (0,\tilde{\mathbb{N}}) : (i,j) \in J_1^{(1)}, \\ & \quad \tau_{ij}^{B_{r+1,r+1,r,r+1}} \mid (0,\mathbb{N}) \times (0,\tilde{\mathbb{N}}) : (i,j) \in J_2^{(1)}) = \\ & = \text{span}(\tau_{ij}^{B^v} \mid (0,\mathbb{N}) \times (0,\tilde{\mathbb{N}}) : (i,j) \in J_v^{(2)}, v = 1,2) \end{aligned}$$

Beweis: " $\supset$ " : Es ist $B_{1,1,1} = \tau_{0,1} \eta_2 + \frac{1}{2}(1+\tau_{1,1})\eta_1$
und $B_{1,1,0,1} = \eta_2 + \frac{1}{2}(1+\tau_{1,-1})\eta_1$. Durch Faltung folgt

$$(2.5.2a) \quad B_{r+1,r+1,r+1,r} = \tau_{0,1} B^2 + \frac{1}{2}(1+\tau_{1,1})B^1$$

$$(2.5.2b) \quad B_{r+1,r+1,r,r+1} = B^2 + \frac{1}{2}(1+\tau_{1,-1})B^1.$$

" $\subset$ " : Man wende $\tau_{0,1}$ auf (2.5.2b) an und subtrahiere das Ergebnis von (2.5.2a). Dies ergibt

$$B_{r+1,r+1,r+1,r} - \tau_{0,1} B_{r+1,r+1,r,r+1} = \frac{1}{2}(1+\tau_{1,1} - \tau_{1,0} - \tau_{0,1})B^1.$$

Man löse nun nach B^1 durch "Inversion" von $1 + \tau_{1,1} - \tau_{1,0} - \tau_{0,1}$ auf. Durch elementare Rechnung folgt

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{i,2j} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{-i,2j+1} \right) (1 + \tau_{1,1} - \tau_{1,0} - \tau_{0,1}) = \\ & = \tau_{0,0} = 1 \quad \text{und daher} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^1 &= 2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{i,2j} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{-i,2j+1} \right) B_{r+1,r+1,r+1,r} - \\ &- 2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{i,2j+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tau_{-i,2j+2} \right) B_{r+1,r+1,r,r+1}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von B^1 in (2.5.2 b) läßt sich auch B^2 als Linearkombination der Boxsplines schreiben. Aufgrund der Beschränktheit des Gebietes brechen die unendlichen Summen ab.
q.e.d.

Ein weiteres neues, zu Satz 2.4.3 analoges Ergebnis ist

Satz 2.5.3: Die Splines $B^1 = \eta_1 * B_{r,r,r,r}$ und $B^2 = \eta_2 * B_{r,r,r,r}$ haben in $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ eindeutigen minimalen Träger.

Der Beweis des Satzes ist wieder eine Modifikation von dem von Satz 2.4.3 [21, Theorem 4.2]. Hierfür benötigen wir einige Hilfssätze.

Lemma 2.5.3: Für $j \in \mathbb{N}_0$ seien $\Omega := \text{con}((0,0), (1,-1), (1,j+1), (0,j))$ und $X := \{f|_{\Omega} : f \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})\}$, $\text{supp } f \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \Omega\}$. Dann ist $\dim X = (j+1-r)_+ + (j-r)_+$.

Der Beweis verläuft analog zu Lemma 4.2 in [21] mit $\theta = \text{con}((0,j), (1,j+1), (0,j+1))$.

Lemma 2.5.4: Es sei $\Omega' := \text{con}((0,0), (0,r), (1,r+1), (1,0)) \cup \text{con}((0,0), (r,-r), (r+1,-r), (1,0))$ und $f \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } f \subset \Omega' \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x+y-1 \geq 0\}$. Dann ist $f|_{\Omega'} = 0$.

Dies läßt sich analog zu Corollary 1 in [21] zeigen.

Lemma 2.5.5: Es sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x+y \geq 0, x-y+r \geq 0, y \leq 2r, x+y-4r-1 \leq 0\}$ und $f \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } f \subset \Omega$. Dann ist $f = 0$.

Beweis: Wir definieren Folgen $(\Omega_\rho)_{\rho \in \mathbb{N}}$ durch

$$\Omega_{1+2v} := (\nu, -\nu) + \text{con}((0,0), (1,-1), (0,r), (1,r+1)) \cup \text{con}((1,r), (1,r+1), (r,2r), (r+1,2r)),$$

$$\Omega_{2+2v} := (\nu, -\nu) + \text{con}((1,r-1), (1,r), (r+1,2r), (r+2,2r)) \cup \text{con}((r+2,2r), (r+1,2r-1), (2r+1,2r), (2r+2,2r-1)), \quad v \in \mathbb{N}_0.$$

Nun wende man Lemma 2.5.4 sukzessive auf Ω_ρ , $\rho \in \mathbb{N}$ an, woraus $f = 0$ folgt. Damit ist Lemma 2.5.5 bewiesen.

Als letztes Hilfsmittel benötigen wir

Lemma 2.5.6: Es sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{con}((0,0), (0,r), (2r+1, 2r+1), (r+1, 2r+1), (5r+2, -r), (r, -r)) \text{ und } f \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } f \subset \Omega$. Dann ist $f=0$.

Beweis: Definiere eine Folge $(\Omega_\rho)_{\rho \in \mathbb{N}}$ durch

$$\Omega_1 := \text{con}((0,0), (0,r), (1, r+1), (1, 0)) \cup \text{con}((0,0), (1, 0), (r+1, -r), (r, -r))$$

$$\Omega_{1+2v} := (v, 0) + \Omega_1, \quad v \in \mathbb{N}.$$

$$A := \text{con}((1, r), (1, r+1), (r, 2r), (r+1, 2r)).$$

$$\Omega_2 := A \cup \text{con}((r, 2r), (r+1, 2r+1), (2r+1, 2r+1), (2r+2, 2r)),$$

$$\Omega_{2+2v} := (v, 0) + A, \quad v \in \mathbb{N}.$$

Man wende nun auf Ω_ρ , $\rho \in \mathbb{N}$ sukzessive entweder Lemma 2.5.4 (auf $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_7$ usw.) oder Lemma 2.5.3 mit $j = r-1$ an (auf $\Omega_4, \Omega_6, \Omega_8$ usw.). Daher ist $f = 0$. q.e.d.

Beweis von Satz 2.5.3:

a. B^1 : Es sei $g \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } g \subset \text{supp } B^1$. Sei $\Omega := \text{con}((0,0), (0,1), (r, -r), (r+1, -r))$. Nach Lemma 2.5.3 mit $j = r$ folgt: $\exists c \in \mathbb{R} : g = c B^1$ auf Ω . Betrachte $f := g - c B^1$, das seinen Träger in $\text{supp } B^1 \setminus \Omega$ hat. Wendet man nun Lemma 2.5.5 an, so folgt $g = c B^1$.

b. B^2 : Wieder sei $g \in S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$ mit $\text{supp } g \subset \text{supp } B^2$. Anwendung von Lemma 2.5.3 auf $\Omega := \text{con}((r+1, -r-1), (r, -r), (2r+2, -r), (2r+1, -r-1))$ ergibt $g = c B^2$ auf Ω . Lemma 2.5.6 zeigt schließlich $g = c B^2$ auf $\mathbb{R}^2$. Damit ist Satz 2.5.3 bewiesen.

Anmerkung: Sätze 2.4.2 und 2.5.2 zeigen, daß die Boxsplines endliche Linearkombinationen der Splines mit minimalem Trä-

ger sind, diese sich jedoch nur durch unendliche Linearkombinationen der Boxsplines ausdrücken lassen.

Nach Satz 2.3.6 ist $3r+2$ eine untere Schranke für die Approximationsordnung von $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$. In Kapitel 4 werden wir zeigen, daß dies die exakte Approximationsordnung ist.

KAPITEL 3:

Basen von Splineräumen

In diesem Kapitel sollen Basen von Splineräumen auf den regulären Triangulationen $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ angegeben werden. Satz 2.21 für $\Delta^{(1)}$ und Satz 2.2.3 für $\Delta^{(2)}$ liefern eine Zerlegung des Splineräume als Summe von Linearkombinationen von Boxsplines, abgeschnittenen Potenzfunktionen und Polynomen. Hier wollen wir die Direktheit der Summe erreichen und die Abhängigkeit der Elemente untereinander untersuchen. Dies läßt sich nur bei relativ einfachen Boxsplinekonfigurationen erreichen, nämlich in den Fällen maximaler Glattheit, bei denen ein oder zwei Boxsplines existieren. Diese Resultate verallgemeinern die bekannten Fälle $S_{4(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})}^2$, $S_{3(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})}^1$ und $S_{2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})}^1$ von Chui und Wang [44,42]. Am einfachsten ist der Fall eines Boxsplines ($S_{3r-2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})}^{2r-2}$, $S_{4r-2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})}^{3r-2}$). Auf $\Delta^{(1)}$ sind die Boxsplines linear unabhängig und auf $\Delta^{(2)}$ können ihre Abhängigkeiten nach Satz 1.4.2 charakterisiert werden. Existieren zwei Boxsplines ($S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$, $S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$), so sind diese äquivalent zu den Splines mit minimalem Träger. Hier existieren stets Abhängigkeiten. Jeder Boxspline induziert eine Partition der Eins. Die Beschreibung aller Abhängigkeiten stellt sich als sehr kompliziert heraus, weshalb für Räume mit mehr als zwei Boxsplines keine Ergebnisse existieren.

3.1. Eine Basis von $S_{3r-2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})}^{2r-2}$, $r \in \mathbb{N}$

Es sei $\Omega = (0,N) \times (0,\tilde{N})$, $N, \tilde{N} \in \mathbb{N}$. Im Fall $r = 2$ ist das folgende Resultat über eine Basis eines Splineräume bekannt [44, Theorem 3.1, Seite 549] :

Satz 3.1.1: Es sei $J := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{2,2,2}} \cap \Omega \neq \emptyset\}$.

Dann bildet das System

$$B = \{\tau_{ij}^{B_{2,2,2}} : (i,j) \in J\},$$

$$(x-p_1)_+^4, \quad p_1 = 0, \dots, N-1,$$

$$(y-p_2)_+^4, \quad p_2 = 0, \dots, \tilde{N}-1,$$

$$(x-y-p_3)_+^4, \quad p_3 = -\tilde{N}, \dots, 0, \dots, N-1\}$$

eine Basis von $S_4^2(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$.

Dieses Resultat wurde mittels linearer Algebra gewonnen.

Es soll nun für die Splineräume auf $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ verallgemeinert werden, in denen genau ein Boxspline existiert. Dies sind $S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ mit den Boxsplines $B_{r,r,r}$, die die Polynome aus $\mathcal{D}(r,r,r)$ erzeugen. Nach (2.1.1) gilt

$$(3.1.1) \quad \dim S_{3r-2}^{2r-2}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) = N\tilde{N} + (r^2 + r - 1)(N + \tilde{N}) + (3r^2 - 3r + 1).$$

Die Feststellung $\mathcal{D}(r,r,r) \subset \mathbb{P}_{3r-2}$ wird näher präzisiert durch

Satz 3.1.2: $\mathcal{D}(r,r,r) \oplus$

$$\text{span}(x^{2r}q, y^{2r}q, (x-y)^{2r}q, q \in \mathbb{P}_{r-2}) = \mathbb{P}_{3r-2}$$

Beweis: Sei

$$(3.1.2) \quad u := p + \sum_{j=0}^{r-2} \sum_{i=0}^{r-2-j} \left[\alpha_{ij}^{(1)} x^{2r} x^i y^j + \alpha_{ij}^{(2)} y^{2r} x^i y^j + \alpha_{ij}^{(3)} (x-y)^{2r} x^i y^j \right] = 0$$

mit $p \in \mathcal{D}(r,r,r)$. Wegen $D_{r,0,r} p = 0$ ((1.4.6)) folgt

$$(3.1.3) \quad D_{r,0,r} u = \sum_{j=0}^{r-2} \sum_{i=0}^{r-2-j} \alpha_{ij}^{(1)} D_{r,0,r} (x^{2r} x^i y^j) = 0,$$

da $D_{r,0,r} (y^{2r} q) = D_{r,0,r} ((x-y)^{2r} q) = 0$ für alle $q \in \mathbb{P}_{r-2}$.

Durch sukzessive Anwendung von $D_{0,1,0}$, $l = r-2, \dots, 0$ auf (3.1.3) folgt $\alpha_{ij}^{(1)} = 0$, $j = 0, \dots, r-2$, $i = 0, \dots, r-2-j$.

Ebenso folgt durch Anwendung von $D_{0,r,r}$ und $D_{r,r,0}$ auf (3.1.2) $\alpha_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij}^{(3)} = 0 \quad \forall i, j$. Da $\dim \mathcal{D}(r, r, r) = 3r^2$ ((1.4.15)) und $\dim \mathcal{D}(r, r, r) + 3 \dim \mathbb{P}_{r-2} = \dim \mathbb{P}_{3r-2}$ ergibt sich die Behauptung q.e.d.

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung von Satz 3.1.1 formulieren.

Satz 3.1.3: Es sei $J := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{r,r,r}} \cap \Omega \neq \emptyset\}$, und q_{lm} , $l = 0, \dots, r-2$, $m = 0, \dots, r-2-l$, eine Basis von $\mathbb{P}_{r-2}$. Dann bildet das System

$$B = \{\tau_{ij}^{B_{r,r,r}} : (i, j) \in J\},$$

$$(x-p_1)_+^{2r} q_{lm}, \quad p_1 = 0, \dots, N-1,$$

$$(y-p_2)_+^{2r} q_{lm}, \quad p_2 = 0, \dots, \tilde{N}-1,$$

$$(x-y-p_3)_+^{2r} q_{lm}, \quad p_3 = -\tilde{N}, \dots, N-1,$$

$$l = 0, \dots, r-2, \quad m = 0, \dots, r-2-l\}$$

eine Basis von $S_{3r-2}^{2r-2} (\Delta_{N,N}^{(1)})$.

Beweis: Wegen $|B| = \dim S_{3r-2}^{2r-2} (\Delta_{N,N}^{(1)})$ und $B \subset S_{3r-2}^{2r-2} (\Delta_{N,N}^{(1)})$

muß nur die lineare Unabhängigkeit der Funktionen aus B

$$\begin{aligned} & \text{gezeigt werden. Sei } \varphi := \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} \tau_{ij}^{B_{r,r,r}} + \\ & + \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{m=0}^{r-2-l} \left[\sum_{p_1=0}^{N-1} \alpha_{lm}^{(1,p_1)} (x-p_1)_+^{2r} x^l y^m + \right. \\ & \left. + \sum_{p_2=0}^{\tilde{N}-1} \alpha_{lm}^{(2,p_2)} (y-p_2)_+^{2r} x^l y^m + \sum_{p_3=-\tilde{N}}^{N-1} \alpha_{lm}^{(3,p_3)} (x-y-p_3)_+^{2r} x^l y^m \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{r,0,r} \varphi = \psi_1 + \psi_2 = 0, \text{ wobei } \psi_1 = \sum_{i,j} \nabla_{r,0,r} a_{ij} \tau_{ij}^{B_{0,r,0}}$$

eine nichtreguläre und

$$\psi_2 = \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{m=0}^{r-2-l} \sum_{p_1=0}^{N-1} \alpha_{lm}^{(1,p_1)} D_{r,0,r} ((x-p_1)^{2r} x^l y^m)$$

eine reguläre Distribution ist. $\Rightarrow \psi_2 = 0$.

Man betrachte diese Gleichung sukzessive für $x \in (n, n+1)$, $n = 0, \dots, N-1$. Durch denselben Schluß wie im Satz 3.1.2

(vgl. (3.1.3)) folgt $\alpha_{lm}^{(1,p_1)} = 0$, $p_1 = 0, \dots, N-1$,

$l = 0, \dots, r-2, m = 0, \dots, r-2-l$.

Ebenso ergibt die Anwendung von $D_{r,r,0}$ und $D_{0,r,r}$ auf φ

$$\alpha_{lm}^{(2,p_2)} = \alpha_{lm}^{(3,p_3)} = 0 \quad \forall p_2, p_3, l, m.$$

$$\text{Damit } \varphi = \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} \tau_{ij}^{B_{r,r,r}} = 0$$

und wegen Satz 1.4.1 $a_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in J$.

q.e.d.

3.2 Eine Basis von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,N}^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$

Nach Satz 2.4.3 haben die Splines $B^1 = \chi_1 * B_{r,r,r}$ und $B^2 = \chi_2 * B_{r,r,r}$ aus (2.4.2) minimalen Träger in

$S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$, wobei χ_1 und χ_2 in (2.4.1) definiert sind.

Die Dimension berechnet sich nach (2.1.1):

$$(3.2.1) \quad \dim S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) = 2N\tilde{N} + (r^2 + 3r)(N + \tilde{N}) + 3r^2$$

Für $S_3^1(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ ($r=1$) existiert folgendes Resultat

[44, Theorem 2.1, Seite 543]:

Satz 3.2.1: Seien $J_v := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B^v} \cap \Omega \neq \emptyset\}$,

$v = 1, 2$.

$$B_1 := \{\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1, \tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2\}$$

$$\text{Dann ist } \text{span } B_1 = S_3^1(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}) .$$

Wir zeigen eine Verallgemeinerung dieses Satzes für Spline-
räume auf $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ mit zwei unabhängigen Boxsplines.

Satz 3.2.2: Seien $J_v := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B^v \cap \Omega \neq \emptyset\}$,
 $v = 1, 2$, und q_{lm} , $l = 0, \dots, r-2$, $m = 0, \dots, r-2-l$ sei eine
Basis von $\mathbb{P}_{r-2}$.

$$B_1 := \{\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1, \tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2\}$$

$$B_2 := \{(x-p_1)_+^{2(r+1)} q_{lm}, p_1 = 0, \dots, N-1, \\ (y-p_2)_+^{2(r+1)} q_{lm}, p_2 = 0, \dots, \tilde{N}-1, \\ (x-y-p_3)_+^{2(r+1)} q_{lm}, p_3 = -\tilde{N}, \dots, N-1, \\ l = 0, \dots, r-2, m = 0, \dots, r-2-l\} .$$

Dann sind die Funktionen in B_2 linear unabhängig, und es
gilt $\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2 = S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$.

Anmerkung: Nach Satz 2.4.2 gilt $\text{span } B_1 =$

$$\text{span}(\tau_{ij} B_{r+1,r,r+1} : (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{supp } \tau_{ij} B_{r+1,r,r+1} \cap \Omega \neq \emptyset, \\ \tau_{ij} B_{r,r+1,r+1} : (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{supp } \tau_{ij} B_{r,r+1,r+1} \cap \Omega \neq \emptyset) .$$

Beweis: 1. Man wende $D_{r+1,r+1,0}$, $D_{0,r+1,r+1}$ und $D_{r+1,0,r+1}$ auf

$$\varphi := \sum_{(i,j) \in J_1} \beta_{ij}^1 \tau_{ij} B^1 + \sum_{(i,j) \in J_2} \beta_{ij}^2 \tau_{ij} B^2 + \\ + \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{m=0}^{r-2-l} \left[\sum_{p_1=0}^{N-1} \alpha_{lm}^{(1,p_1)} (x-p_1)_+^{2(r+1)} x^l y^m + \right.$$

$$+ \sum_{p_2=0}^{\tilde{N}-1} \alpha_{1m}^{(2,p_2)} (y-p_2)_+^{2(r+1)} x^1 y^m + \\ + \sum_{p_3=-\tilde{N}}^{N-1} \alpha_{1m}^{(3,p_3)} (x-y-p_3)_+^{2(r+1)} x^1 y^m \Big] = 0$$

an und beachte, daß diese Differentialoperatoren für B^1 und B^2 nichtreguläre Distributionen ergeben, z.B.

$$D_{r+1,0,r+1} B^1 = D_{1,0,1} (\chi_1 * D_{r,0,r} B_{r,r,r}) = \\ = \nabla_{r,0,r} D_{0,0,1} (D_{1,0,0} \chi_1 * B_{0,r,0}) = \\ = \nabla_{r,0,r} D_{0,0,1} ((B_{0,1,0} - B_{0,0,1}) * B_{0,r,0}) = \\ = \nabla_{r,0,r} D_{0,0,1} (B_{0,r+1,0} - B_{0,r,1}) = \\ = \nabla_{r,0,r} (D_{0,0,1} B_{0,r+1,0} - \nabla_{0,0,1} B_{0,r,0}) .$$

Wie im Beweis von Satz 3.1.3 folgt $\alpha_{1m}^{(1,p_1)} = \alpha_{1m}^{(2,p_2)} = \alpha_{1m}^{(3,p_3)} = 0$

$\forall p_1, p_2, p_3, 1, m$.

Daraus folgt die lineare Unabhängigkeit des Systems

B_2 (also $\dim \text{span } B_2 = |B_2| = (r^2 - r)(N + \tilde{N})$) und die Direktheit der Summe.

2. $\dim \text{span } B_1 =$

$$= \dim \text{span}(\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1) + \dim \text{span}(\tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2) - \\ - \dim(\text{span}(\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1) \cap \text{span}(\tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2))$$

Für die Bestimmung der Dimension des Durchschnitts benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.2.1: $\text{span}(\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1) \cap$
 $\text{span}(\tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2) = \mathcal{D}(r, r, r)$

Beweis des Lemmas: " $\supset$ ": Man betrachte die lineare Abbildung

$$(3.2.2) \quad \psi_1 : \mathcal{D}(r, r, r) \rightarrow \mathcal{D}(r, r, r) , \quad q \mapsto q * \chi_1 .$$

Sie ist wohldefiniert, da z.B.

$$D_{r,r,0} q = 0 \Rightarrow D_{r,r,0}(q * \chi_1) = (D_{r,r,0} q) * \chi_1 = 0.$$

Ferner ist Ψ_1 injektiv, denn $\deg(\Psi_1 q - q) < \deg q$ für $q \in \mathcal{D}(r,r,r)$. Demnach ist Ψ_1 auch surjektiv, wonach es für $p \in \mathcal{D}(r,r,r)$ ein $q \in \mathcal{D}(r,r,r)$ = $\text{span}(\tau_{ij}^{B_{r,r,r}}) \cap \mathbb{P}$ gibt mit $p = q * \chi_1 = (\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \gamma_{ij} \tau_{ij}^{B_{r,r,r}}) * \chi_1 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \gamma_{ij} \tau_{ij}^{B^1}$.

Ebenso folgt $p \in \text{span}(\tau_{ij}^{B^2})$

$$" \subset ": \text{ Sei } p = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^1 \tau_{ij}(\chi_1 * B_{r,r,r}) =$$

$$= \sum_{i,j} \gamma_{ij}^2 \tau_{ij}(\chi_2 * B_{r,r,r}) \Rightarrow$$

$$(3.2.3) \quad D_{r,0,r} p = \sum_{i,j} (\nabla_{r,0,r} \gamma_{ij}^1) \tau_{ij}(\chi_1 * B_{0,r,0}) = \\ = \sum_{i,j} (\nabla_{r,0,r} \gamma_{ij}^2) \tau_{ij}(\chi_2 * B_{0,r,0})$$

(3.2.4) Behauptung: $\tau_{ij}(\chi_1 * B_{0,r,0}), \tau_{ij}(\chi_2 * B_{0,r,0})$
(lokal) linear unabhängig.

Beweis der Behauptung:

$$\varphi := \sum_{i,j} b_{ij}^1 \tau_{ij}(\chi_1 * B_{0,r,0}) + \sum_{i,j} b_{ij}^2 \tau_{ij}(\chi_2 * B_{0,r,0}) = 0$$

$$\Rightarrow D_{1,0,0} \varphi = \sum_{i,j} (b_{ij}^1 - b_{i-1,j}^2) \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0}} + \\ + \sum_{i,j} (b_{ij}^2 - b_{ij}^1) \tau_{ij}^{B_{0,r,1}} = 0$$

Dies ist wieder die Summe einer nichtregulären und regulären Distribution. Es folgt

$$b_{ij}^1 = b_{i-1,j}^2, \quad b_{ij}^1 = b_{ij}^2 \quad \forall i,j.$$

Mit den Bedingungen, die man aus $D_{0,0,1} \varphi = 0$ erhält, ergibt

$$\text{sich } b_{ij}^1 = b_{ij}^2 = b \quad \forall i,j \Rightarrow \varphi = b \sum_{i,j} \tau_{ij}^{B_{1,r+1,0}} = 0$$

$$(\text{da } \chi_1 + \chi_2 = B_{1,1,0}) \Rightarrow b = b_{ij}^1 = b_{ij}^2 = 0 \quad \forall i,j.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Wendet man dies auf (3.2.3) an, ergibt sich $D_{r,o,r} p = 0$.

Ebenso ergeben sich $D_{r,r,o} p = D_{o,r,r} p = 0$.

$$\Rightarrow p \in \mathcal{D}(r,r,r).$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir benötigen noch ein weiteres Lemma.

Lemma 3.2.2: Für $v = 1, 2$ gilt:

$(\tau_{ij} B^v : (i,j) \in J_v)$ linear unabhängig.

Beweis von Lemma 3.2.2:

$$\varphi := \sum_{(i,j) \in J_v} a_{ij}^v \tau_{ij} (\chi_v * B_{r,r,r}) = 0$$

$$\Rightarrow D_{r,o,r} \varphi = \sum (\nabla_{r,o,r} a_{ij}^v) \tau_{ij} (\chi_v * B_{o,r,o}) = 0$$

Wegen (3.2.4) ergibt sich $\nabla_{r,o,r} a_{ij}^v = 0$.

$$\text{Ebenso: } \nabla_{r,r,o} a_{ij}^v = \nabla_{o,r,r} a_{ij}^v = 0$$

$$\Rightarrow p := \sum_{i,j} a_{ij}^v \tau_{ij} B_{r,r,r} \in \mathcal{D}(r,r,r)$$

$$\Rightarrow 0 = \varphi = \chi_v * p = \psi_v(p) \quad \text{wobei}$$

$$\psi_v : \mathcal{D}(r,r,r) \rightarrow \mathcal{D}(r,r,r) \quad q \mapsto \chi_v * q$$

ein Isomorphismus ist. Deshalb ist $p = \sum_{i,j} a_{ij}^v \tau_{ij} B_{r,r,r} = 0$

und damit $a_{ij}^v = 0 \quad \forall i,j$.

Damit ist dieses Lemma bewiesen.

3. Wegen $|J_1| = |J_2| = N\tilde{N} + 2r(N+\tilde{N}) + 3r^2$ folgt nach
2. somit

$$\begin{aligned} (3.2.5) \quad \dim \text{span } B_1 &= |J_1| + |J_2| - \dim \mathcal{D}(r,r,r) = \\ &= 2 N\tilde{N} + 4r(N+\tilde{N}) + 3r^2. \end{aligned}$$

4. Nach 1. und 3. ergibt sich insgesamt

$$\dim(\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2) = \dim \text{span } B_1 + \dim \text{span } B_2 = \\ = 2N\tilde{N} + (r^2 + 3r)(N + \tilde{N}) + 3r^2 = \dim S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$$

Wegen $B_1, B_2 \subset S_{3r}^{2r-1}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)})$ folgt damit die Behauptung des Satzes. q.e.d.

Anmerkung: Das System B_1 kann auf folgende Weise zu einem linear unabhängigen System reduziert werden. Es sei M ein offenes Dreieck der Zerlegung $\Delta_{N,\tilde{N}}^{(1)}$ und $K := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } B_{r,r,r} \cap M \neq \emptyset\}$. Dann ist $|K| = \dim \mathcal{D}(r,r,r) = 3r^2$

und $\Psi_2 : \mathcal{P}_K := \{p|_K : p \in \mathcal{D}(r,r,r)\} \rightarrow \{p|_M : p \in \mathcal{D}(r,r,r)\}$,
 $\Psi_2 p := \sum_{(i,j) \in K} p(i,j) \tau_{ij}^{B_{r,r,r}}$ ist ein Isomorphismus

(vgl. (1.4.10)). Ebenso ist $\Psi_3 : \mathcal{D}(r,r,r) \rightarrow \mathcal{D}(r,r,r)$
 $\Psi_3 p := \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} p(i,j) \tau_{ij}^{B_{r,r,r}}$ ein Isomorphismus. Da

Ψ_1 in (3.2.2) ebenfalls bijektiv ist, folgt, daß

$\Psi_4 : \mathcal{D}(r,r,r) \rightarrow \{p|_{J_1} : p \in \mathcal{D}(r,r,r)\}$, $\Psi_4 p = \sum_{(i,j) \in J_1} p(i,j) \tau_{ij}^{B^1}$
 ein Isomorphismus ist. Wir können nun zeigen

Lemma 3.2.3: Ist $p \in \mathcal{D}(r,r,r)$ und $p|_K = 0$, so ist $p = 0$.

Beweis: $p|_K = 0 \Rightarrow \Psi_2 p = 0$. Da $\Psi_3 p|_M = \Psi_2 p = 0$ und $\Psi_3 p$ ein Polynom ist, folgt $\Psi_3 p = 0$ und damit $p = 0$, weil Ψ_3 ein Isomorphismus ist. q.e.d.

Wir behaupten nun

Satz 3.2.3: Das System

$$\tilde{B}_1 := \{\tau_{ij}^{B^1} : (i,j) \in J_1 \setminus K, \tau_{ij}^{B^2} : (i,j) \in J_2\}$$

ist linear unabhängig auf Ω , und $\text{span } \tilde{B}_1 = \text{span } B_1$.

Beweis: Es sei $p_1 + p_2 = 0$ mit $p_1 = \sum_{(i,j) \in J_1 \setminus K} \alpha_{ij} \tau_{ij} B^1$
 und $p_2 = \sum_{(i,j) \in J_2} \beta_{ij} \tau_{ij} B^2$. Nach Lemma 3.2.1 ist $p_1 \in \mathcal{D}(r, r, r)$,
 und da Ψ_4 surjektiv ist, gibt es $p \in \mathcal{D}(r, r, r)$ mit $\alpha_{ij} = p(i, j)$
 für alle $(i, j) \in J_1 \setminus K$ und $p(i, j) = 0$ für alle $(i, j) \in K$. Wegen
 Lemma 3.2.3 ist daher $\alpha_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in J_1 \setminus K$ und somit
 $p_1 = p_2 = 0$. Lemma 3.2.2 führt auf $\beta_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in J_2$.
 Aus (3.2.5) folgt schließlich $\text{span } \tilde{B}_1 = \text{span } B_1$. q.e.d.
 Ebenso kann K auch von J_2 statt von J_1 weggelassen werden.
 Wir bemerken noch

Satz 3.2.4: Das Interpolationsproblem in $\mathcal{D}(r, r, r)$ bezüglich
 der Punktmenge K ist eindeutig lösbar.

Beweis: Betrachte $\Psi: \mathcal{D}(r, r, r) \rightarrow \mathbb{R}^{|K|}$, $\Psi p = (p(z))_{z \in K}$.
 Nach Lemma 3.2.3 ist Ψ injektiv, und wegen $\dim \mathcal{D}(r, r, r) = |K|$
 ist Ψ ein Isomorphismus. q.e.d.

3.3 Eine Basis von $S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$

Für Splineräume auf $\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)}$ ist bislang nur folgendes Resultat
 bekannt [42, Theorem 2.1]:

Satz 3.3.1: Es sei $J := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{1,1,1,1} \cap \Omega \neq \emptyset\}$.
 Dann ist für alle $(l, m) \in J$
 $B := \{\tau_{ij} B_{1,1,1,1} : (i, j) \in J \setminus \{(l, m)\}\}$ eine Basis von $S_2^1(\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)})$.

Dieses Ergebnis, das ein Spezialfall für $r = 1$ ist, soll für
 beliebige $r \in \mathbb{N}$ verallgemeinert werden.

Analog zu Satz 3.1.2 kann für die Polynome eine Aussage gewonnen werden.

Satz 3.3.2: $\mathcal{D}(r, r, r, r) \oplus$

$$\text{span } (x^{3r} q, y^{3r} q, (x-y)^{3r} q, (x+y)^{3r} q, q \in \mathbb{P}_{r-2}) = \mathbb{P}_{4r-2}$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 3.1.2 kann die Unabhängigkeit der Funktionen durch Anwendung der Differentialoperatoren $D_{r,r,r,0}$, $D_{r,r,0,r}$, $D_{r,0,r,r}$ und $D_{0,r,r,r}$ gewonnen werden. Die Behauptung ergibt sich dann aus

$$\dim \mathcal{D}(r, r, r, r) + 4 \dim \mathbb{P}_{r-2} = 6r^2 + 4\binom{r}{2} = \dim \mathbb{P}_{4r-2}$$

q.e.d.

Nach (2.1.2) berechnet sich die Dimension zu

$$(3.3.1) \quad \dim S_{4r-2}^{3r-2} \left(\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)} \right) = \\ = N\tilde{N} + \left(\frac{3}{2}r(r+1) - 1 \right) (N + \tilde{N}) + 6r^2 - 4r + 1$$

Die Aussage über eine Basis in $S_{4r-2}^{3r-2} \left(\Delta_{N, \tilde{N}}^{(2)} \right)$ lautet damit

Satz 3.3.3: Es sei $J := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{r,r,r,r} \cap \Omega \neq \emptyset\}$.

q_{1m} , $1 = 0, \dots, r-2$, $m = 0, \dots, r-2-1$ sei eine Basis von $\mathbb{P}_{r-2}$.

$$B_1 := \{\tau_{ij} B_{r,r,r,r} : (i, j) \in J\}$$

$$B_2 := \{(x-p_1)_+^{3r} q_{1m}, \quad p_1 = 0, \dots, N-1,$$

$$(y-p_2)_+^{3r} q_{1m}, \quad p_2 = 0, \dots, \tilde{N}-1,$$

$$(x-y-p_3)_+^{3r} q_{1m}, \quad p_3 = -\tilde{N}, \dots, N-1$$

$$(x+y-p_4)_y^{3r} q_{1m}, \quad p_4 = 0, \dots, N+\tilde{N}-1,$$

$$1 = 0, \dots, r-2, \quad m = 0, \dots, r-2-1\}.$$

Dann ist B_2 linear unabhängig und $\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2 =$

$$= S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) .$$

Beweis: Wieder folgt mittels $D_{r,r,r,o}, D_{r,r,o,r}, D_{r,o,r,r}$ und $D_{o,r,r,r}$ die Direktheit der Summe und

$$\dim \text{span } B_2 = |B_2| = \frac{3}{2}(r^2 - r)(N + \tilde{N}) .$$

Wegen Satz 1.4.2 ist

$$\begin{aligned} \dim \text{span } B_1 &= |J| - r^2 = \\ &= N\tilde{N} + (3r-1)(N+\tilde{N}) + 6r^2 - 4r + 1 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \dim (\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2) &= \\ &= N\tilde{N} + \left(\frac{3}{2}r(r+1) - 1\right)(N+\tilde{N}) + 6r^2 - 4r + 1 = \dim S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) . \end{aligned}$$

Wegen $B_1, B_2 \subset S_{4r-2}^{3r-2}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$ folgt somit die Behauptung des Satzes. q.e.d.

Anmerkung: Ähnlich wie in Abschnitt 3.2 kann B_1 zu einem linear unabhängigen System reduziert werden. M sei ein offenes Dreieck der Zerlegung

$$\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)} \text{ und } K := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } B_{o,o,r,r} \cap M \neq \emptyset\} .$$

Dann ist $|K| = \dim \mathcal{D}(0,0,r,r) = r^2$. Analog können wir zeigen

Satz 3.3.4: Das System

$$\tilde{B}_1 := \{\tau_{ij} B_{r,r,r,r} : (i,j) \in J \setminus K\}$$

ist linear unabhängig, und $\text{span } \tilde{B}_1 = \text{span } B_1$.

Beweis: Aus $\sum_{(i,j) \in J \setminus K} \alpha_{ij} \tau_{ij} B_{r,r,r,r} = 0$ folgt

nach Satz 1.4.2:

$\exists q \in \mathcal{D}(0,0,r,r) : \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} q(i,j)$ für alle $(i,j) \in J \setminus K$ und $q(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in K$. Ähnlich wie in Lemma 3.2.3 folgt $q = 0$ und daher $\alpha_{ij} = 0$ für alle $(i,j) \in J \setminus K$.

q.e.d.

3.4 Eine Basis von $S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$

Es seien η_1 und η_2 die Funktionen aus $S_1^0(\Delta^{(2)})$ in Abschnitt 2.5.2 und

$$(3.4.1) \quad B^1 := \eta_1 * B_{r,r,r,r}, \\ B^2 := \eta_2 * B_{r,r,r,r} \quad (\text{wie in (2.5.1)})$$

die beiden Splines in $S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$ mit minimalem Träger.

Zur Abkürzung setzen wir

$$(3.4.2) \quad D^1 := B_{r+1,r+1,r+1,r}, \quad D^2 := B_{r+1,r+1,r,r+1}.$$

Nach Satz 2.5.2 gilt

$$\text{span}(\tau_{ij} B^1, \tau_{ij} B^2) = \text{span}(\tau_{ij} D^1, \tau_{ij} D^2).$$

Die Dimension ist wegen (2.1.2)

$$(3.4.3) \quad \dim S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}) = \\ = 2 N\tilde{N} + \left(\frac{3}{2}r(r+3) + 1\right)(N+\tilde{N}) + 6r^2 + 4r + 1.$$

Die Aussage über eine Basis lautet

Satz 3.4.1: Seien $J_v := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B^v \cap \Omega \neq \emptyset\}$, $v = 1, 2$. q_{lm} , $l = 0, \dots, r-2$, $m = 0, \dots, r-2-l$ sei eine Basis von $\mathbb{P}_{r-2}$.

$$B_1 := \{\tau_{ij} B^1 : (i,j) \in J_1, \\ \tau_{ij} B^2 : (i,j) \in J_2\}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 := & \{ (x-p_1)_+^{3(r+1)} q_{1m}, \quad p_1 = 0, \dots, N-1, \\
 & (y-p_2)_+^{3(r+1)} q_{1m}, \quad p_2 = 0, \dots, \tilde{N}-1, \\
 & (x-y-p_3)_+^{3(r+1)} q_{1m}, \quad p_3 = -\tilde{N}, \dots, N-1 \\
 & (x+y-p_4)_+^{3(r+1)} q_{1m}, \quad p_4 = 0, \dots, N+\tilde{N}-1, \\
 & l = 0, \dots, r-2, \quad \tilde{m} = 0, \dots, r-2-1 \}
 \end{aligned}$$

Dann ist B_2 linear unabhängig, und es gilt

$$\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2 = S_{4r+1}^{3r} (\Lambda_{N, \tilde{N}}^{(2)})$$

Beweis: 1. Durch die Anwendung von $D_{r+1, r+1, r+1, 0}$, $D_{r+1, r+1, 0, r+1}$, $D_{r+1, 0, r+1, r+1}$ und $D_{0, r+1, r+1, r+1}$ folgt die Direktheit der Summe und

$$\begin{aligned}
 (3.4.4) \quad \dim \text{span } B_2 &= |B_2| = \frac{3}{2}(r^2 - r)(N + \tilde{N}) \\
 (\text{In } B_1 \text{ verwende man } D^1 \text{ und } D^2 \text{ statt } B^1 \text{ und } B^2).
 \end{aligned}$$

2. Es seien

$$L_v := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} D^v \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

$$v = 1, 2. \quad \text{Dann ist}$$

$$\begin{aligned}
 \dim \text{span } B_1 &= \dim \text{span } (\tau_{ij} D^1 : (i, j) \in L_1) + \\
 &+ \dim \text{span } (\tau_{ij} D^2 : (i, j) \in L_2) - \dim(\text{span}(\tau_{ij} D^1 : (i, j) \in L_1) \cap \\
 &\quad \text{span } (\tau_{ij} D^2 : (i, j) \in L_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dim \text{span } (\tau_{ij} D^v : (i, j) \in L_v) &= |L_v| - r(r+1) = \\
 &= N\tilde{N} + (3r+1)(N+\tilde{N}) + 6r^2 + 5r + 1, \quad v = 1, 2 \text{ (Satz 1.4.2)}.
 \end{aligned}$$

Damit

$$(3.4.5) \quad \dim \operatorname{span} B_1 = 2 N \tilde{N} + (6r+2)(N+\tilde{N}) + 12r^2 + 10r + 2 - \\ - \dim(\operatorname{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1) \cap \\ \cap \operatorname{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2)).$$

Für die Berechnung der Dimension des Durchschnitts benötigen wir Lemma 3.4.1.

3. Wir zeigen noch folgende Gleichungen.

$$(3.4.6) \quad \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{r,0} = \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]}$$

$$(3.4.7) \quad \chi_{[0,1]} \times \mathbb{R} * B_{0,r} = \chi_{[0,1]} \times \mathbb{R}$$

Beweis von (3.4.6):

$$\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{r,0} = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_{i,-1} B_{1,1} \right) * B_{r,0} = \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_{i,-1} B_{r+1,1} = \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} \quad \text{wegen (1.4.1)}$$

Ebenso läßt sich (3.4.7) beweisen.

Lemma 3.4.1:

$$\operatorname{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1) \cap \operatorname{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2) \\ = \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) + \operatorname{span}(\tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0, r+1, r, r} \quad , \\ j = -3r, \dots, \tilde{N}, \\ \tau_{i0} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1, 0, r, r} \quad i = -3r-1, \dots, N-1)$$

Beweis:

$$" \supset ": \text{ a. } \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) \subset \mathcal{D}(r+1, r+1, r+1, r)$$

$$\subset \operatorname{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1) \quad ,$$

$$\mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) \subset \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r+1) \subset \operatorname{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2) \quad .$$

b. Behauptung: $\tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r} \in$

$$\text{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1)$$

(3.4.6)

$$\tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r} =$$

$$= \tau_{0j} (\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{r,0,0,0}) * B_{0,r+1,r,r} =$$

$$= \tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{r,r+1,r,r} =$$

$$= \tau_{0j} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_{i,-1} B_{1,0,1,0} \right) * B_{r,r+1,r,r} =$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_{i,j-1} B_{r+1,r+1,r+1,r}$$

c. Behauptung: $\tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r} \in$

$$\text{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1)$$

(3.4.7)

$$\tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r} =$$

$$= \tau_{io} (\chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{0,r,0,0}) * B_{r+1,0,r,r} =$$

$$= \tau_{io} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{0j} B_{0,1,1,0} \right) * B_{r+1,0,r,r} =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{ij} B_{r+1,r+1,r+1,r}$$

d. Ebenso zeigt man $\tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r} \in$

$$\text{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2)$$

indem man $\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_{io} B_{1,0,0,1}$ verwendet.

e. Ebenso $\tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r} \in \text{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2)$

unter Beachtung von $\chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_{0j} B_{0,1,0,1}$.

" $\subset$ ": Sei

$$\varphi = \sum_{(i,j) \in L_1} \alpha_{ij} \tau_{ij} D^1 = \sum_{(i,j) \in L_2} \beta_{ij} \tau_{ij} D^2 \quad \text{und}$$

$$\psi := \varphi - \sum_{j=-3r}^{\tilde{N}} \gamma_{oj} \tau_{oj} (X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{o,r+1,r,r}) - \\ - \sum_{i=-3r-1}^{N-1} \sigma_{io} \tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,o,r,r}) .$$

Es soll gezeigt werden, daß bei festem φ γ_{oj} und σ_{io} so gewählt werden können, daß $\psi \in \mathcal{D}(r+1,r+1,r,r)$ ist.

Man beachte

$$D_{1,o,o,o} X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} = D_{o,1,o,o} X_{[0,1] \times \mathbb{R}} = 0 .$$

$$\begin{aligned} \text{a. } D_{r+1,r+1,r,o} \psi &= D_{r+1,r+1,r,o} \varphi = \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,r+1,r,o} \alpha_{ij}) \tau_{ij} B_{o,o,1,r} = \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,r+1,r,o} \beta_{ij}) \tau_{ij} B_{o,o,o,r+1} \end{aligned}$$

Da $B_{o,o,1,r}$ eine reguläre und $B_{o,o,o,r+1}$ eine nichtreguläre Distribution ist, wird $D_{r+1,r+1,r,o} \psi = 0$

$$\begin{aligned} \text{b. } D_{r+1,r+1,o,r} \psi &= D_{r+1,r+1,o,r} \varphi = \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,r+1,o,r} \alpha_{ij}) \tau_{ij} B_{o,o,r+1,o} = \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,r+1,o,r} \beta_{ij}) \tau_{ij} B_{o,o,r,1} \quad \text{und daher} \\ D_{r+1,r+1,o,r} \psi &= 0 \quad (\text{wie in a.}) . \end{aligned}$$

c. Behauptung: Die (γ_{oj}) können so gewählt werden, daß $D_{o,r+1,r,r} \psi = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Seien } \omega_{ij}^{(1)} &:= \nabla_{o,r+1,r,r} \alpha_{ij} \\ \omega_{ij}^{(2)} &:= \nabla_{o,r+1,r,r} \beta_{ij} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &:= D_{o,r+1,r,r} \varphi = \sum_{i,j} \omega_{ij}^{(1)} \tau_{ij} B_{r+1,o,1,o} \\ &= \sum_{i,j} \omega_{ij}^{(2)} \tau_{ij} B_{r+1,o,o,1} . \end{aligned}$$

Wegen $D_{0,0,1,0} = 2 D_{1,0,0,0} - D_{0,0,0,1}$ folgt

$$\begin{aligned} D_{0,0,1,0} \phi &= \sum_{i,j} (\nabla_{0,0,1,0} \omega_{ij}^{(1)}) \tau_{ij}^{B_{r+1,0,0,0}} = \\ &= \sum_{i,j} (2 \nabla_{1,0,0,0} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{r,0,0,1}} - \\ &- \sum_{i,j} (\nabla_{0,0,0,1} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{r+1,0,0,0}} \Rightarrow \\ &\sum_{i,j} (\nabla_{0,0,1,0} \omega_{ij}^{(1)} - \nabla_{0,0,0,1} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{r+1,0,0,0}} = \\ &= \sum_{i,j} (2 \nabla_{1,0,0,0} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{r,0,0,1}} \end{aligned}$$

$B_{r+1,0,0,0}$ nichtreguläre, $B_{r,0,0,1}$ reguläre Distribution.

$$\Rightarrow \nabla_{1,0,0,0} \omega_{ij}^{(2)} = 0 \quad \forall i,j \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{ij}^{(2)} = A_j \quad \forall i,j$$

$$\Rightarrow \phi = \sum_{i,j} A_j \tau_{ij}^{B_{r+1,0,0,1}} =$$

$$= \sum_j A_j \tau_{0j} \left(\sum_i \tau_{i0}^{B_{1,0,0,1}} \right) * B_{r,0,0,0} =$$

$$= \sum_j A_j \tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{r,0,0,0} \stackrel{(3.4.6)}{=} \sum_j A_j \tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]}$$

$$\text{Ferner } D_{0,r+1,r,r} \left(\sum_j \gamma_{0j} \tau_{0j} (\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r}) \right) =$$

$$= \sum_j \gamma_{0j} \tau_{0j} (\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * \nabla_{0,r+1,r,r} \delta) =$$

$$= \sum_j (\nabla_{0,r+1,r,r} \gamma_{0j}) \tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]}$$

Also $D_{0,r+1,r,r} \psi =$

$$= \sum_{j=-3r}^{\tilde{N}} (A_j - \nabla_{0,r+1,r,r} \gamma_{0j}) \tau_{0j} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]}$$

γ_{0j} können nun so gewählt werden, daß $A_j = \nabla_{0,r+1,r,r} \gamma_{0j}$,

$j = -3r, \dots, \tilde{N}$ wird. Somit $D_{0,r+1,r,r} \psi = 0$.

d. Behauptung: Die (σ_{io}) können so gewählt werden, daß

$$D_{r+1,0,r,r} \psi = 0.$$

Seien $\omega_{ij}^{(1)} := \nabla_{r+1,0,r,r} \alpha_{ij}$, $\omega_{ij}^{(2)} := \nabla_{r+1,0,r,r} \beta_{ij}$. $\Rightarrow$

$$\phi := D_{r+1,0,r,r} \varphi = \sum_{i,j} \omega_{ij}^{(1)} \tau_{ij}^{B_{0,r+1,1,0}} =$$

$$= \sum_{i,j} \omega_{ij}^{(2)} \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0,1}}$$

Wegen $D_{0,0,1,0} = D_{0,0,0,1} + 2D_{0,1,0,0}$ folgt:

$$D_{0,0,1,0} \phi = \sum_{i,j} (\nabla_{0,0,1,0} \omega_{ij}^{(1)}) \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0,0}} =$$

$$= \sum_{i,j} (\nabla_{0,0,0,1} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0,0}} + \sum_{i,j} (2\nabla_{0,1,0,0} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{0,r,0,1}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j} (\nabla_{0,0,1,0} \omega_{ij}^{(1)} + \nabla_{0,0,0,1} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0,0}} =$$

$$= \sum_{i,j} (2\nabla_{0,1,0,0} \omega_{ij}^{(2)}) \tau_{ij}^{B_{0,r,0,1}} \Rightarrow$$

$$\omega_{ij}^{(2)} = A_i \quad \forall i,j$$

$$\Rightarrow \phi = \sum_{i,j} A_i \tau_{ij}^{B_{0,r+1,0,1}} =$$

$$= \sum_i A_i \tau_{io} \left(\sum_j \tau_{oj}^{B_{0,1,0,1}} \right) * B_{0,r,0,0} =$$

$$= \sum_i A_i \tau_{io} (\chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{0,r,0,0}) =$$

$$= \sum_i A_i \tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}}$$

$$\text{Ferner } D_{r+1,0,r,r} \left(\sum_i \sigma_{io} \tau_{io} (\chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r}) \right) =$$

$$= \sum_i \sigma_{io} \tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * \nabla_{r+1,0,r,r} \delta =$$

$$= \sum_i (\nabla_{r+1,0,r,r} \sigma_{io}) \tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}}. \text{ Also } D_{r+1,0,r,r} \psi =$$

$$= \sum_{i=-3r-1}^{N-1} (A_i - \nabla_{r+1,0,r,r} \sigma_{io}) \tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}}$$

(σ_{io}) können so gewählt werden, daß $A_i = \nabla_{r+1,0,r,r} \sigma_{io}$,

$i = -3r-1, \dots, N-1$ wird. Somit $D_{r+1,0,r,r} \psi = 0$

e. Aus a., b., c. und d. folgt $\psi \in \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r)$, womit das Lemma bewiesen ist.

Um die Dimension zu bestimmen, benötigen wir noch weitere Aussagen.

Lemma 3.4.2: Es sei

$$U := \left\{ \sum_{j=-3r}^N \alpha_{oj} \tau_{oj} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=-3r-1}^{N-1} \beta_{io} \tau_{io} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r} : \right.$$

$$(\alpha_{oj}) \in \mathbb{P}_{3r}, \quad (\beta_{io}) \in \mathbb{P}_{3r} \}.$$

Dann ist $\mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) \cap \text{span}(\tau_{oj} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r},$
 $j = -3r, \dots, \tilde{N},$

$$\tau_{io} \chi_{[0,1]} * B_{r+1,0,r,r}, \quad i = -3r-1, \dots, N-1) = U.$$

Beweis: Es sei

$$\varphi := \sum_j \alpha_{oj} \tau_{oj} (\chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r}) +$$

$$+ \sum_i \beta_{io} \tau_{io} (\chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r}).$$

$$\text{Wegen } D_{1,0,0,0} \chi_{\mathbb{R} \times [-1,0]} = D_{0,1,0,0} \chi_{[0,1] \times \mathbb{R}} = 0$$

$$\text{ist } D_{r+1,r+1,r,0} \varphi = D_{r+1,r+1,0,r} \varphi = 0.$$

Nun ist

$$\nabla_{0,r+1,r,r} \alpha_{oj} = \nabla_{0,2r+1,0,0} (\nabla_{0,0,0,r} \alpha_{oj}) =$$

$$= \nabla_{0,2r+1,0,0} (\tau_{0,-r} (-1)^r \nabla_{0,r,0,0} \alpha_{oj}) =$$

$$= (-1)^r \tau_{0,-r} \nabla_{0,3r+1,0,0} \alpha_{oj} \quad \text{und}$$

$\nabla_{r+1,0,r,r} \beta_{io} = \nabla_{3r+1,0,0,0} \beta_{io}$. Daher

$$\begin{aligned} D_{0,r+1,r,r} \varphi &= \sum_j \alpha_{oj} \tau_{oj} (X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * \nabla_{0,r+1,r,r} \delta) = \\ &= (-1)^r \sum_j (\nabla_{0,3r+1,0,0} \alpha_{o,j+r}) \tau_{oj} X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{r+1,0,r,r} \varphi &= \sum_i \beta_{io} \tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * \nabla_{r+1,0,r,r} \delta) = \\ &= \sum_i (\nabla_{3r+1,0,0,0} \beta_{io}) \tau_{io} X_{[0,1] \times \mathbb{R}} . \end{aligned}$$

Folglich ist φ genau dann in $\mathcal{D}(r+1,r+1,r,r)$, wenn

$\nabla_{0,3r+1,0,0} \alpha_{oj} = 0 \quad \forall j$ und $\nabla_{3r+1,0,0,0} \beta_{io} = 0 \quad \forall i$, d.h. wenn (α_{oj}) und (β_{io}) in $\mathbb{P}_{3r}$ sind. Damit ist Lemma 3.4.2 bewiesen.

Nun können wir die Dimension von U berechnen.

Lemma 3.4.3: Sei U wie in Lemma 3.4.2. Dann ist
 $\dim U = 6r + 1$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \varphi &:= \sum_j \alpha_{oj} \tau_{oj} (X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r}) + \\ &+ \sum_i \beta_{io} \tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r}) . \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir

(3.4.8) $\tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r,0,r,r})$, $i = -3r, \dots, N-1$, sind linear unabhängig (über Ω).

Dies ist klar für $r=0$ ($B_{0,0,0,0} = \delta$). Sei $r \geq 1$ und

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \gamma_{io} \tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r,0,r,r}) = \\ &= \sum_i \gamma_{io} \tau_{io} \left(\sum_j \tau_{oj} B_{1,1,0,0} \right) * B_{r,0,r,r} = \\ &= \sum_{i,j} \gamma_{io} \tau_{ij} B_{r+1,1,r,r} . \end{aligned}$$

Nach Anwendung von $D_{0,0,r}$ und Satz 1.4.1 folgt

$0 = \nabla_{0,0,r,0} \gamma_{io} = \nabla_{r,0,0,0} \gamma_{io}$, also gibt es

$v \in W := \left\{ \sum_{l=0}^{r-1} a_l x^l : a_l \in \mathbb{R}, l = 0, \dots, r-1 \right\}$ mit

$v(i,j) = \gamma_{io} \quad \forall i,j$.

Die lineare Abbildung $W \rightarrow W$

$$q \mapsto \sum_{i,j} q(i,j) \tau_{ij} B_{r+1,1,r,r}$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus, weshalb

$\gamma_{io} = 0 \quad \forall i$ folgt.

Ebenso gilt:

(3.4.9) $\tau_{oj} (X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r,r,r}), \quad j = -3r, \dots, \tilde{N}$ sind linear unabhängig über Ω .

Sei nun $\varphi = 0$.

$$\Rightarrow D_{1,0,0,0} \varphi = 0 = \sum_i (\nabla_{1,0,0,0} \beta_{io}) \tau_{io} (X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r,0,r,r}).$$

Die lineare Unabhängigkeit ergibt daher $\beta_{io} = \beta \quad \forall i$.

Ebenso folgt aus $D_{0,1,0,0} \varphi = 0$, $\alpha_{oj} = \alpha \quad \forall j$.

Insgesamt also $0 = \varphi = \alpha \left(\sum_j \tau_{oj} X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} \right) * B_{0,r+1,r,r} +$

$+ \beta \left(\sum_i \tau_{io} X_{[0,1] \times \mathbb{R}} \right) * B_{r+1,0,r,r} = \alpha (1 * B_{0,r+1,r,r}) +$

$+ \beta (1 * B_{r+1,0,r,r}) = \alpha + \beta$.

Als Ergebnis erhält man somit $\varphi = 0 \Leftrightarrow \alpha_{oj} = \alpha = -\beta_{io} \quad \forall i,j$.

Deshalb

$\dim U = 2(3r+1) - 1 = 6r+1 \quad \text{q.e.d. (Lemma 3.4.3)}$

Nun muß nur noch die Dimension eines Raumes bestimmt werden.

Lemma 3.4.4: $\dim \text{span}(\tau_{oj} (X_{\mathbb{R} \times [-1,0]} * B_{0,r+1,r,r}), j = -3r, \dots, \tilde{N},$

$\tau_{io} X_{[0,1] \times \mathbb{R}} * B_{r+1,0,r,r}, i = -3r-1, \dots, N-1) = (N+\tilde{N}) + 6r + 1.$

Beweis: Wie in Lemma 3.4.3.

4. Mit Lemma 3.4.1, Lemma 3.4.2, Lemma 3.4.3 und Lemma 3.4.4

$$\begin{aligned} & \dim(\text{span}(\tau_{ij} D^1 : (i,j) \in L_1) \cap \text{span}(\tau_{ij} D^2 : (i,j) \in L_2)) = \\ &= \dim \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) + (N+\tilde{N}) + 6r+1 - (6r+1) = \\ &= (N+\tilde{N}) + 6r^2 + 6r + 1, \text{ denn nach (1.4.16) ist} \\ & \dim \mathcal{D}(r+1, r+1, r, r) = 6r^2 + 6r + 1 \end{aligned}$$

(3.4.5) ergibt daher

$$\dim \text{span } B_1 = 2 N\tilde{N} + (6r+1)(N+\tilde{N}) + 6r^2 + 4r + 1.$$

Wegen (3.4.4) folgt

$$\begin{aligned} & \dim(\text{span } B_1 \oplus \text{span } B_2) = \dim \text{span } B_1 + \dim \text{span } B_2 = \\ &= 2 N\tilde{N} + \left(\frac{3}{2}r(r+3) + 1\right)(N+\tilde{N}) + 6r^2 + 4r + 1 = \\ & \dim S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)}). \end{aligned}$$

Aufgrund von $B_1, B_2 \subset S_{4r+1}^{3r}(\Delta_{N,\tilde{N}}^{(2)})$ ist Satz 3.4.1 damit bewiesen.

KAPITEL 4:

Approximation in Splineräumen

Für einen Splineräum $S_k^\mu(\Delta^{(v)})$, $v = 1, 2$ wurden in Abschnitt 2.3 untere Schranken für die Approximationsordnung angegeben. Die bekannten oberen Schranken sind oft nicht scharf, und nur bei $S_3^1(\Delta^{(1)})$ wurde auf komplizierte Weise die obere Schranke 3 gefunden. Abschnitt 4.1 zeigt, daß die exakte lokale Approximationsordnung eines Systems endlich vieler Funktionen mit kompaktem Träger kleiner sein kann als die wahre Approximationsordnung. Deshalb ist es notwendig für bestimmte Splineklassen, neue obere Schranken zu finden, da die Untersuchungen von Dahmen und Micchelli [65,67] auf der lokalen Ordnung beruhen. In Abschnitt 4.2 werden für das System $\phi = (B_{2,1}, B_{1,2})$ verschiedene Möglichkeiten vorgestellt. Die wichtigste besteht darin, aus der Annahme einer höheren Konvergenzordnung durch Ableitungen Bedingungen an die Koeffizienten der Approximation zu gewinnen. Dabei treten bestimmte Differenzen der Koeffizienten auf, die durch Summation aufgelöst werden können. Es kommen dann Randterme vor, die von spezieller, nicht allgemein zweidimensionaler Natur sind und zu einem Widerspruch führen. Abschnitt 4.3 bringt eine Anwendung zur Bestimmung der Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$. Alle folgenden Abschnitte bringen Ergebnisse für Klassen von Splineräumen. Dabei können die exakten Approximationsordnungen von Splineräumen auf $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ mit maximaler Glattheit bestimmt werden. In den Abschnitten 4.7, 4.10 und 4.11 werden die auftretenden höheren Differenzen durch Faltung mit diskreten Conesplines aufgelöst. Die verschiedenen Klassen von Splineräumen unterscheiden sich durch unterschiedliche Boxsplinekonfigurationen. Danach können die Beweise ziemlich kompliziert werden.

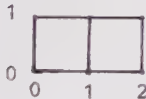
4.1 Beispiel zur lokalen Approximation

Es sei l die exakte lokale Approximationsordnung für ein System $\phi \in W_{\infty, C}^0$, d.h. l sei die größte Zahl, für die die äquivalenten Bedingungen von Satz 2.3.2 erfüllt sind. Dann kann die Approximationsordnung l für $S_1(\phi)$ ((2.3.5)) garantiert werden. Wir werden nun ein Beispiel angeben, in dem

1. die exakte lokale Approximationsordnung l ist und
2. die Approximationsordnung 2 ist.

Es sei

$$(4.1.1) \quad \phi = (B_{2,1}, B_{2,0,1}) .$$



Träger von $B_{2,1}$



Träger von $B_{2,0,1}$

Lemma 4.1.1: Die exakte lokale Approximationsordnung des Systems ϕ in (4.1.1) ist 1 .

Beweis: Nach (2.3.11) gilt

$$\hat{B}_{2,1}(x,y) = (\rho(x))^2 \rho(y) \text{ und } \hat{B}_{2,0,1}(x,y) = (\rho(x))^2 \rho(x+y)$$

mit ρ aus (2.3.9). Daher

$$(4.1.2) \quad \hat{B}_{2,1}(0,2\pi) = \hat{B}_{2,0,1}(0,2\pi) = 0$$

wegen $\rho(2\pi) = 0$.

Wir wollen annehmen, daß Satz 2.3.2 mit $l=2$ erfüllt ist, es also insbesondere $\psi_{0,0}$, $\psi_{1,0}$ und $\psi_{0,1}$ aus $\text{span } \phi$ gibt, die die Bedingungen (2.3.6) mit $l=2$ erfüllen. Insbesondere bedeutet (2.3.6b) für $z=(0,2\pi)$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{1,0}(0,2\pi) - i D_{1,0} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) &= 0 \\ \hat{\psi}_{0,1}(0,2\pi) - i D_{0,1} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) &= 0\end{aligned}$$

und wegen (4.1.2)

$$D_{1,0} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) = D_{0,1} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) = 0.$$

Mit $\psi_{0,0} = a B_{2,1} + b B_{2,0,1}$ ist wegen $\rho(0) = 1$
 $D_{1,0} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) = b \rho'(2\pi)$ und $D_{0,1} \hat{\psi}_{0,0}(0,2\pi) =$
 $= \rho'(2\pi)(a+b)$, woraus wegen $\rho'(2\pi) \neq 0$ $\psi_{0,0} = 0$ folgt.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Bedingung (2.3.6a),
 die $\hat{\psi}_{0,0}(0) = 1$ fordert. Es ist einfach einzusehen, daß
 jedes der Systeme $\phi_1 = (B_{2,1})$ und $\phi_2 = (B_{2,0,1})$ die Be-
 dingungen (2.3.6) mit $l=1$ erfüllt. q.e.d.

Wir wollen noch zeigen, daß ϕ eine Approximation der Ord-
 nung 2 erlaubt. Zunächst betrachten wir für $j=0, \dots, N-1$
 auf dem Streifen $(0,N) \times (j,j+1)$ den Splineraum

$$(4.1.3) \quad S_j := \text{span}(\tau_{ij}^{B_{2,1}} \mid (0,N) \times (j,j+1), \quad i=-1, \dots, N-1, \\ \tau_{ij}^{B_{2,0,1}} \mid (0,N) \times (j,j+1), \quad i=-2, \dots, N-1)$$

Sei $\Delta_j^{(1)}$ die durch $\Delta^{(1)}$ induzierte Triangulation auf
 $(0,N) \times (j,j+1)$. Wir behaupten

$$(4.1.4) \quad S_j = S_1^O(\Delta_j^{(1)}).$$

Beweis: Zunächst gilt $S_j \subset S_1^O(\Delta_j^{(1)})$.

$$\text{Es sei } \varphi = \sum_{i=-1}^{N-1} \alpha_i \tau_{ij}^{B_{2,1}} = \sum_{i=-2}^{N-1} \beta_i \tau_{ij}^{B_{2,0,1}}.$$

$$\Rightarrow D_{0,1} \varphi = \sum_{i=-1}^{N-1} \nabla_{0,1} \alpha_i \tau_{ij}^{B_{2,0}} = D_{0,0,1} \varphi - D_{1,0} \varphi =$$

$$= \sum_{i=-1}^{N-1} (\nabla_{0,0,1} \beta_i) \tau_{ij}^{B_{2,0,0}} - \sum_{i=-1}^{N-1} \nabla_{1,0} \beta_i \tau_{ij}^{B_{1,0,1}}.$$

Durch Vergleich von regulären und nichtregulären Distributionen folgt $\nabla_{1,0}\beta_i = 0, i = -1, \dots, N-1$.

Ebenso $D_{0,0,1}\varphi = \sum \nabla_{0,0,1}\beta_i \tau_{ij}^{B_{2,0}} = D_{1,0}\varphi + D_{0,1}\varphi =$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \nabla_{1,0}\alpha_i \tau_{ij}^{B_{1,1}} + \sum \nabla_{0,1}\alpha_i \tau_{ij}^{B_{2,0}} \Rightarrow$$

$$\nabla_{1,0}\alpha_i = 0, i=0, \dots, N-1 \Rightarrow$$

$$\alpha_i = \alpha, i = -1, \dots, N-1, \beta_i = \beta, i = -2, \dots, N-1.$$

Wegen (1.4.1) ist daher $\varphi = \alpha = \beta$. Aufgrund von Satz 1.4.1 ergibt sich $\dim S_j = (N+1) + (N+2) - 1 = 2N+2 = \dim S_1^O(\Delta_j^{(1)})$.

q.e.d.

Im folgenden seien Werte von $s \in S_j$ in (x, j) stets als Grenzwerte von oben und in $(x, j+1)$ als Grenzwerte von unten zu verstehen. Es ist bekannt, daß das Interpolationsproblem in $S_1^O(\Delta_j^{(1)})$ bezüglich der Punkte $(i, n), i=0, \dots, N, n=j, j+1$ eindeutig lösbar ist. Jedes $s \in S_1^O(\Delta_j^{(1)}) = S_j$ läßt sich

$$\text{eindeutig in der Form } s = \sum_{i=-1}^{N-1} \alpha_i \tau_{ij}^{B_{2,1}} + \sum_{i=-1}^{N-1} \beta_i \tau_{ij}^{B_{2,0,1}}$$

schreiben, und es ist

$$\begin{aligned} s(i, j) &= \alpha_{i-1} + \beta_{i-1} \\ s(i, j+1) &= \alpha_{i-1} + \beta_{i-2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &= 0, \dots, N \\ (\beta_{-2} &= 0) \end{aligned}$$

Durch Differenzenbildung folgt $\beta_{i-1} - \beta_{i-2} = s(i, j) - s(i, j+1)$,
 $i = 0, \dots, N$ und daher $\beta_1 = \beta_1 - \beta_{-2} = \sum_{i=0}^{1+1} (s(i, j) - s(i, j+1))$.

Insgesamt erhält man durch Auflösung nach α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{i=0}^{1+1} s(i, j+1) - \sum_{i=0}^1 s(i, j) \\ (4.1.5) \quad \beta_1 &= \sum_{i=0}^{1+1} s(i, j) - \sum_{i=0}^{1+1} s(i, j+1), \quad i = -1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Abhängigkeit der Koeffizienten nicht "lokal" ist.

Wegen (4.1.4) folgt

$$(4.1.6) \quad \bigoplus_{j=1}^{N-1} S_j = S_1^{-1,0,0}(\Delta_{N,N}^{(1)}) .$$

Dabei ist $S_1^{-1,0,0}(\Delta_{N,N}^{(1)})$ der Raum aller Funktionen, die auf jedem Dreieck von $\Delta_{N,N}^{(1)}$ aus $\mathbb{P}_1$ sind, über die erste Richtung keine Stetigkeitsforderung haben und über die zweite und dritte Richtung stetig sind. Es ist also

$$\begin{aligned} S_1^0(\Delta_{N,N}^{(1)}) &\subset S_1^{-1,0,0}(\Delta_{N,N}^{(1)}) = \\ &= \text{span}(\tau_{ij}^{B_{2,1}} : (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{supp } \tau_{ij}^{B_{2,1}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset , \\ &\quad \tau_{ij}^{B_{2,0,1}} : (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \text{supp } \tau_{ij}^{B_{2,0,1}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset) . \end{aligned}$$

Da $S_1^0(\Delta^{(1)})$ eine Approximation der Ordnung 2 erlaubt, folgt

Lemma 4.1.2: $S_1(\phi)$ mit ϕ aus (4.1.1) hat die Approximationsordnung 2 .

Ein Spline aus $S_1(\phi)$, der eine einfache Approximation der Ordnung 2 gestattet, ist das Courantsche Element $B_{1,1,1}$.

Da $B_{1,1,1}$ das Lagrangeelement zum Interpolationsproblem ist, kann man mittels (4.1.5) die Darstellung bezüglich der Boxsplines $B_{2,1}$ und $B_{2,0,1}$ berechnen:

$$\begin{aligned} (4.1.7) \quad \tau_{i-1,j-1}^{B_{1,1,1}} &= \sum_{l=i-1}^{\infty} \tau_{l,j-1}^{B_{2,1}} - \sum_{l=i-1}^{\infty} \tau_{l,j-1}^{B_{2,0,1}} - \\ &\quad - \sum_{l=i}^{\infty} \tau_{l,j}^{B_{2,1}} + \sum_{l=i-1}^{\infty} \tau_{l,j}^{B_{2,0,1}} \end{aligned}$$

Eine Approximation der Ordnung 2 für ein $f \in C^2(I \times I)$ ist dann

$$(4.1.8) \quad (Q_h f)(x, y) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f(ih, jh) \tau_{i-1, j-1}^{B_{1,1,1}} \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h} \right).$$

Ersetzt man darin den Ausdruck in (4.1.7), so erhält man

$$(4.1.9) \quad (Q_h f)(x, y) = \\ = \sum_{l=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f((l+1)h, (j+1)h) \tau_{lj}^{B_{2,1}} \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h} \right) + \\ + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^1 [f(ih, (j+1)h) - f(ih, jh)] \tau_{lj}^{B_{2,1}} \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h} \right) + \\ + \sum_{l=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{1+1} [f(ih, jh) - f(ih, (j+1)h)] \tau_{lj}^{B_{2,0,1}} \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h} \right)$$

Hier sieht man, daß für diese Approximation die Bedingung (2.3.5b) verletzt ist. Deshalb ist Q_h keine lokale L_p -Approximation der Ordnung 2.

4.2 Approximation mit $B_{2,1}$ und $B_{1,2}$

Der zugrundegelegte Splineraum sei

$$(4.2.1) \quad S = \text{span}(\tau_{ij}^{B_{2,1}}, \tau_{ij}^{B_{1,2}} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2).$$

Die Boxsplines $B_{2,1}(x, y) = B_2(x)B_1(y)$ und $B_{1,2}(x, y) = B_1(x)B_2(y)$ sind Tensorproduktsplines. $B_{2,1}$ hat Unstetigkeiten über $\text{con}((0,0), (2,0))$ und $\text{con}((0,1), (2,1))$, $B_{1,2}$ über $\text{con}((0,0), (0,2))$ und $\text{con}((1,0), (1,2))$. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $h=1/N$ und

$$J_1 := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{2,1}} \cap (0, N)^2 \neq \emptyset\}, \\ J_2 := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{1,2}} \cap (0, N)^2 \neq \emptyset\}. \text{ Dazu sei}$$

$$(4.2.2) \quad \mathcal{B}_1^h := \{\tau_{ij}^{B_{2,1}} \left(\frac{\cdot}{h} \right) \Big|_{I \times I} : (i, j) \in J_1\} \\ \mathcal{B}_2^h := \{\tau_{ij}^{B_{1,2}} \left(\frac{\cdot}{h} \right) \Big|_{I \times I} : (i, j) \in J_2\}.$$

Nach (2.3.1) ist $S_h = \text{span } \mathcal{B}_1^h + \text{span } \mathcal{B}_2^h$.

Für alle $f \in C^2(I \times I)$ ist mit der Bezeichnung in (2.3.2) $\text{dist}(f, S_h) \leq \text{dist}(f, \text{span } \mathcal{B}_v^h) = O(h)$, $v = 1, 2$.

Die Approximationsordnung ist also mindestens 1. Es sei W wie in (2.3.13). Dann ist für alle $f \in W \cap C^2(I \times I)$ $\text{dist}(f, S_h) = O(h^2)$. Es stellt sich nun die Frage, ob $\text{dist}(f, S_h) = O(h^2)$ auch für andere Funktionen $f \in C^2(I \times I) \setminus W$ gilt. Wegen $1, x \in \text{span } B_1^h, 1, y \in \text{span } B_2^h$, also $\mathbb{P}_1 \in S_h$ wäre dies durchaus denkbar (vgl. [17]). Es gilt allerdings:

Satz 4.2.1: Es sei $f \in C^2(I \times I)$. Dann ist $\text{dist}(f, S_h) = O(h)$ genau dann, wenn $f \in W$.

Es ist nur noch $\text{dist}(f, S_h) = O(h) \Rightarrow f \in W$ zu zeigen. Hierfür geben wir zwei Beweise an.

1. Beweis von Satz 4.2.1: Es ist

$$J_1 = \{(i, j) : i = -1, \dots, N-1, j = 0, \dots, N-1\} \text{ und} \\ J_2 = \{(i, j) : i = 0, \dots, N-1, j = -1, \dots, N-1\}.$$

Es sei $f \in C^2(I \times I)$ und es gebe

$$(\alpha_{ij}^h)_{(i,j) \in J_1}, \quad (\beta_{ij}^h)_{(i,j) \in J_2} \quad \text{mit}$$

$$(4.2.3) \quad e(x, y) := f(x, y) - \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij}^h B_{2,1}\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right) -$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=-1}^{N-1} \beta_{ij}^h B_{1,2}\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right) = O(h)$$

gleichmäßig für $(x, y) \in I \times I$.

Da die Splinefunktionen unstetig sind, müssen wir Folgen von Funktionsauswertungen betrachten, die gegen einen Gitterpunkt (lh, mh) , $l, m = 0, \dots, N$ konvergieren.

a. Für $l, m = 0, \dots, N-1$ ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow lh+ \\ y \rightarrow mh+}} e(x, y) = \\ = f(lh, mh) - \alpha_{l-1, m}^h - \beta_{l, m-1}^h = O(h).$$

Andere Folgen sind

- b. $\lim_{\substack{x \rightarrow lh+ \\ y \rightarrow mh-}} e(x,y) = f(lh,mh) - \alpha_{l-1,m-1}^h - \beta_{l,m-1}^h = o(h)$
 $l=0, \dots, N-1, m=1, \dots, N$
- c. $\lim_{\substack{x \rightarrow lh- \\ y \rightarrow mh+}} e(x,y) = f(lh,mh) - \alpha_{l-1,m}^h - \beta_{l-1,m-1}^h = o(h)$
 $l=1, \dots, N, m=0, \dots, N-1$
- d. $\lim_{\substack{x \rightarrow lh- \\ y \rightarrow mh-}} e(x,y) = f(lh,mh) - \alpha_{l-1,m}^h - \beta_{l-1,m-1}^h = o(h)$
 $l=1, \dots, N, m=0, \dots, N-1$.

Ziehen wir die Gleichung in a. von der in b. ab, erhalten wir

$$\alpha_{l-1,m}^h - \alpha_{l-1,m-1}^h = \nabla_{0,1} \alpha_{l-1,m}^h = o(h)$$

$$l=0, \dots, N-1, m=1, \dots, N-1$$

Ebenso: Gleichung in c. minus Gleichung in a.:

$$\nabla_{1,0} \beta_{l,m-1}^h = o(h)$$

$$l=1, \dots, N-1, m=0, \dots, N-1$$

Insgesamt erhält man, nachdem man noch Gleichung in d. minus Gleichung in c. und Gleichung in d. minus Gleichung in b. ausgewertet hat:

$$\nabla_{0,1} \alpha_{lm}^h = o(h) \quad l = -1, \dots, N-1, m = 1, \dots, N-1$$

$$\nabla_{1,0} \beta_{lm}^h = o(h) \quad l = 1, \dots, N-1, m = -1, \dots, N-1$$

Daraus folgt

$$\sum_{m=1}^j (\nabla_{0,1} \alpha_{im}^h) = \alpha_{ij}^h - \alpha_{i,0}^h = \sum_{m=1}^j (o(h)) = o(1)$$

$$i = -1, \dots, N-1, j = -1, \dots, N-1,$$

also

$$\alpha_{ij}^h = \alpha_{i,0}^h + o(1), \quad i = -1, \dots, N-1, j = 0, \dots, N-1$$

und

$$\sum_{l=1}^i (\nabla_{1,0} \beta_{lj}^h) = \beta_{ij}^h - \beta_{0,j}^h = \sum_{l=1}^i (o(h)) = o(1)$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = -1, \dots, N-1,$$

also

$$\beta_{ij}^h = \beta_{0,j}^h + o(1), \quad i = 0, \dots, N-1, \\ j = -1, \dots, N-1.$$

Deshalb

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij}^h B_{2,1}(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j) = \\ &= \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{i,0}^h B_2(\frac{x}{h} - i) B_1(\frac{y}{h} - j) + \\ &+ \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_{ij}^h B_2(\frac{x}{h} - i) B_1(\frac{y}{h} - j) = \\ &= \sum_{i=-1}^{N-1} \alpha_{i,0}^h B_2(\frac{x}{h} - i) + o(1) \end{aligned}$$

denn: $|\gamma_{ij}^h| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ in

i, j gleichmäßig, also

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_{ij}^h B_2(\frac{x}{h} - i) B_1(\frac{y}{h} - j) \right| \leq \\ & \leq |\gamma_{ij}^h| \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} B_2(\frac{x}{h} - i) B_1(\frac{y}{h} - j) = |\gamma_{ij}^h| = o(1) \end{aligned}$$

da eindimensionale B-Splines eine Zerlegung der Eins bilden. Ähnlich folgt

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=-1}^{N-1} \beta_{ij}^h B_{1,2}(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j) = \sum_{j=-1}^{N-1} \beta_{0,j}^h B_2(\frac{y}{h} - j) + o(1).$$

Setzt man dies in (4.2.3) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=-1}^{N-1} \alpha_{i,0}^h B_2(\frac{x}{h} - i) - \sum_{j=-1}^{N-1} \beta_{0,j}^h B_2(\frac{y}{h} - j) = o(1) \\ &= f(x, y) - \varphi_1^h(x) - \varphi_2^h(y). \end{aligned}$$

Da $\{g_1(x) + g_2(y) : g_1, g_2 \in C(I)\}$ in $C(I \times I)$ abgeschlossen ist (siehe (2.3.13)), folgt: $f \in W$.

Damit ist der erste Beweis von Satz 4.2.1 beendet.

2. Beweis von Satz 4.2.1:

Wie im 1. Beweis sei (4.2.3) erfüllt. Nun wenden wir Satz 2.3.4 an:

$$e_1(x, y) := D_{1,0} f(x, y) - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\nabla_{1,0} \alpha_{ij}^h) B_{1,1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1).$$

(Man beachte, daß $B_{0,2}$ eine nichtreguläre Distribution und auf jedem offenen Teilquadrat 0 ist). $\Rightarrow$

$$(4.2.4a) \lim_{\substack{x \rightarrow lh+ \\ y \rightarrow mh+}} e_1(x, y) = D_{1,0} f(lh, mh) - \frac{1}{h} \nabla_{1,0} \alpha_{1m}^h = o(1).$$

Entsprechend

$$e_2(x, y) := D_{0,1} f(x, y) - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\nabla_{0,1} \beta_{ij}^h) B_{1,1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1).$$

$$(4.2.4b) \lim_{\substack{x \rightarrow lh+ \\ y \rightarrow mh+}} e_2(x, y) = D_{0,1} f(lh, mh) - \frac{1}{h} \nabla_{0,1} \beta_{1m}^h = o(1)$$

Nun benötigen wir ein einfaches Lemma.

Lemma 4.2.1: Es sei $\psi \in C^2(I)$ und $h = \frac{1}{N}$. Dann ist

$$h \sum_{l=0}^i \psi'(lh) = \psi(ih) - \psi(0) + o(h) \quad \text{gleichmäßig bezüglich} \\ i = 0, \dots, N.$$

Beweis des Lemmas: Aufgrund der Taylorformel gilt für

$$l = 0, \dots, N-1$$

$$\psi((l+1)h) - \psi(lh) = h\psi'(lh) + \frac{h^2}{2} \psi''(\eta_1)$$

$$\text{mit } \eta_1 \in (lh, (l+1)h). \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{i-1} [\psi((l+1)h) - \psi(lh)] &= \psi(ih) - \psi(0) = \\ &= h \sum_{l=0}^{i-1} \psi'(lh) + \frac{h^2}{2} \sum_{l=0}^{i-1} \psi''(\eta_l) \\ &= h \sum_{l=0}^i \psi'(lh) + O(h) \quad \text{für } i = \dots, N. \end{aligned}$$

Die Konstante in $O(h)$ hängt nur von $\|\psi'\|_\infty$ und $\|\psi''\|_\infty$ ab. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun wenden wir dieses Lemma auf (4.2.4a) an:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^i [h D_{1,0} f(lh, jh) - \nabla_{1,0} \alpha_{1j}^h] &= o(1) \\ &= f(ih, jh) - f(0, jh) - \alpha_{ij}^h + \alpha_{-1,j}^h + o(h) \\ \text{Somit } \alpha_{ij}^h &= f(ih, jh) - \tilde{\varphi}_1^h(j) + o(1), \\ \text{wobei } \tilde{\varphi}_1^h(j) &= f(0, jh) - \alpha_{-1,j}^h \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Lemmas auf (4.2.4b) erhält man entsprechend

$$\beta_{ij}^h = f(ih, jh) - \tilde{\varphi}_2(i) + o(1) \quad \text{mit } \tilde{\varphi}_2^h(i) = f(ih, 0) - \beta_{i,-1}^h.$$

Setzt man diese Werte für α_{ij}^h und β_{ij}^h in (4.2.3) ein und beachtet nach (1.4.3)

$$\sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(ih, jh) B_{2,1} \left(\frac{x}{2} - i, \frac{y}{h} - j \right) = f(x, y) + o(h)$$

(entsprechend mit $B_{1,2}$), so findet man

$$\begin{aligned} f(x, y) - \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_1^h(j) B_1 \left(\frac{y}{h} - j \right) - \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_2^h(i) B_1 \left(\frac{x}{h} - i \right) &= \\ = f(x, y) - \varphi_1^h(x) - \varphi_2^h(y) &= o(1) \quad (\varphi_v^h := \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_v^h(i) B_1 \left(\frac{\cdot}{h} - i \right)). \end{aligned}$$

Da W abgeschlossen in $C(I \times I)$ ist, folgt nach Glättung von φ_1^h, φ_2^h (φ_v^h unstetig): $f \in W$. q.e.d.

Anmerkung: In allgemeineren Situationen wird die Methode der Differentiation bezüglich verschiedener Differentialoperatoren wie sie im 2. Beweis ausgeführt ist, gegenüber dem 1. Beweis bevorzugt, da die Funktionsauswertung eines allgemeinen Boxsplines sehr kompliziert ist. Stets wird die Annahme einer erhöhten Konvergenzordnung zu einer Approximation der Funktion oder einer ihrer Ableitungen mittels "spezieller" Funktionen führen, die der "Allgemeinheit" der Funktion widerspricht. Falls wir nur an der Approximationsordnung von S_h interessiert sind, können wir einen weiteren Beweis angeben, der von Satz 2.3.9 Gebrauch macht.

(4.2.5) Behauptung: $\exists f \in C^\infty(I \times I) : \exists C > 0 : \text{dist}(f, S_h) \geq Ch$

Beweis: Für $i, j = 0, \dots, N-1$ sei $I_{ij}^h := (ih, (i+1)h) \times (jh, (j+1)h)$. Der Raum $A_h := \{f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}, f|_{I_{ij}^h} \in C^1(I_{ij}^h), i, j = 0, \dots, N-1, \|f\|_h < \infty\}$ habe die Norm

$$(4.2.6) \quad \|f\|_h := \max_{i,j=0,\dots,N-1} \|f\|_{I_{ij}^h} + \\ + h \max_{i,j=0,\dots,N-1} \max(\|D_{1,0} f\|_{I_{ij}^h}, \|D_{0,1} f\|_{I_{ij}^h}).$$

Für $i, j = 0, \dots, N-2$ sind dann

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^h f &:= f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} (D_{1,0} f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2}) + D_{0,1} f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2})) - \\ &- f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} (D_{1,0} f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{h}{2}) - D_{0,1} f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{h}{2})) - \\ &- f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{3h}{2}) + \frac{h}{2} (-D_{1,0} f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{3h}{2}) + D_{0,1} f(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{3h}{2})) + \\ &+ f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{3h}{2}) - \frac{h}{2} (D_{1,0} f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{3h}{2}) + D_{0,1} f(ih + \frac{3h}{2}, jh + \frac{3h}{2})) \end{aligned}$$

stetige lineare Funktionale auf A_h mit $\lambda_{ij}^h s = 0 \quad \forall s \in S_h$.

Ebenso ist $\phi^h f := \sum_{i,j=0}^{N-2} \lambda_{ij}^h f$ stetig mit $\phi^h s = 0 \quad \forall s \in S_h$.

Die explizite Berechnung von $\phi^h f$ ergibt

$$\begin{aligned} \phi^h f &= f\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) - f\left(1-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) - f\left(\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right) + f\left(1-\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}(D_{1,0} f\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) + \\ &+ D_{1,0} f\left(1-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) - D_{1,0} f\left(\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right) - D_{1,0} f\left(1-\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right)) + \frac{h}{2}(D_{0,1} f\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) + \\ &+ D_{0,1} f\left(\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right) - D_{0,1} f\left(1-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) - D_{0,1} f\left(1-\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2}\right)) + \\ &+ h \sum_{i=1}^{N-2} (D_{1,0} f(ih+\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) - D_{1,0} f(ih+\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2})) + h \sum_{j=1}^{N-2} (D_{0,1} f(\frac{h}{2}, jh+\frac{h}{2}) - \\ &- D_{0,1} f(1-\frac{h}{2}, jh+\frac{h}{2})) . \end{aligned}$$

Man beachte, daß die inneren Anteile wegfallen und nur Auswertungen in den Randquadraten vorkommen. Dies ergibt folgende Abschätzung für die Norm:

$$\begin{aligned} |\phi^h f| &\leq c_1 \|f\|_{L_\infty(I \times I)} + c_1 N h \max(\|D_{1,0} f\|_{L_\infty(I \times I)}, \|D_{0,1} f\|_{L_\infty(I \times I)}) \\ &\leq \frac{c_1}{h} \|f\|_h \quad \text{mit } c_1 > 0 . \end{aligned}$$

Daher $\|\phi^h\|_h \leq \frac{c_1}{h}$. Wir wählen nun $f(x,y) = xy$ und be-

rechnen $\lambda_{ij}^h f = -h^2$, $\forall i, j = 0, \dots, N-2$, weshalb

$$\phi^h f = -1 + 2h - h^2 \quad (\Rightarrow |\phi^h f| \geq \frac{1}{4} \quad \text{für } h \leq \frac{1}{2}) .$$

Nach Satz 2.3.9 ergibt sich:

$$\begin{aligned} (4.2.7) \quad \text{dist}(f, S_h)_h &:= \inf_{s \in S_h} \|f - s\|_h \geq \frac{|\phi^h f|}{\|\phi^h\|_h} \geq \frac{1 \cdot h}{4 c_1} = \\ &= \tilde{C} h \quad \text{mit } \tilde{C} > 0 \end{aligned}$$

Wir müssen nun

$\text{dist}(f, S_h) \geq Ch$ mit $C > 0$ zeigen.

Nehmen wir das Gegenteil an, dann gibt es $\gamma(h)$ mit $\gamma(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ und $s_h \in S_h : \|f - s_h\| \leq \gamma(h) \cdot h$. Nach Satz 2.3.4 gilt auch

$$\max\{\|D_{1,0}(f-s_h)\|_{L_\infty(I \times I)}, \|D_{0,1}(f-s_h)\|_{L_\infty(I \times I)}\} \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$ und daher $\|f - s_h\| \leq \eta(h)h$ mit $\eta(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Dies widerspricht aber (4.2.7). Damit ist auch diese Behauptung bewiesen.

Anmerkung: Für $f(x,y) = x^2$ oder y^2 ist $\lambda_{ij}^h f = 0 \quad \forall i,j$ und damit $\phi^h f = 0$. In diesem Fall ergibt sich keine Aussage über $\text{dist}(f, S_h)$. Es ist jedoch klar, daß hier $\text{dist}(f, S_h) = O(h^2)$ erfüllt ist. Der Hintergrund für den Erfolg der Beweisidee ist im wesentlichen das Peanokerntheorem, das $\lambda_{ij}^h f = O(h^2)$ liefert, denn $\lambda_{ij}^h s = 0 \quad \forall s \in \mathbb{P}_1$. Dabei ist entscheidend, daß ein $f \in \mathbb{P}_2$ existiert, für das $\lambda_{ij}^h f = c_{ij}h^2 + O(h^3)$ und $\sum_{i,j=0}^{N-2} c_{ij} \neq 0$ ist. Die Methode von de Boor und Höllig [20], annihilierende lineare Funktionale zu konstruieren, die nur Randbeiträge liefern, führt nur hier zu scharfen Ergebnissen und kann nicht auf den allgemeinen Fall $B_{r+1,r}, B_{r,r+1}$ (siehe Abschnitt 4.4) übertragen werden. Auch liefert sie keine Äquivalenz, für welche Funktionen eine höhere Approximationsordnung auftritt.

4.3 Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$

Nun ist es einfach, einen neuen Beweis für die Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$ anzugeben. Nach Satz 2.3.6 gilt für alle $f \in C^3(I \times I)$

$$\text{dist}(f, (S_3^1(\Delta^{(1)}))_h) = O(h^3).$$

Sei nun $f \in C^4(I \times I)$ und

$$\text{dist}(f, (S_3^1(\Delta^{(1)}))_h) = O(h^3).$$

Wegen Satz 3.2.2 und Anmerkung gibt es deshalb

$\alpha_{ij}^h, (i,j) \in J_1, \beta_{ij}^h, (i,j) \in J_2$ mit $f(x,y) -$

$$- \sum_{(i,j) \in J_1} \alpha_{ij}^{h B_{2,1,2}} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) -$$

$$- \sum_{(i,j) \in J_2} \beta_{ij}^{h B_{1,2,2}} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h^3)$$

gleichmäßig für $(x,y) \in I \times I$.

Dabei sei

$J_1 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{2,1,2}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\}$ und

$J_2 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{1,2,2}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\}$.

Wendet man Satz 2.3.4 an, ergibt sich

$$D_{0,0,2} f(x,y) = \sum_{i=-1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,2} \alpha_{ij}^h \right) B_{2,1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) -$$

$$- \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=-1}^{N-1} \left(\frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,2} \beta_{ij}^h \right) B_{1,2} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h) .$$

Satz 4.2.1 induziert

$D_{0,0,2} f \in \{g_1(x) + g_2(y) : g_1, g_2 \in C^2(I)\}$.

Dies ist eine Einschränkung an die Allgemeinheit von f , weshalb 3 die exakte Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$ ist.

Satz 4.3.1: Die exakte Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(1)})$ ist 3.

4.4 Approximation mit $B_{r+1,r}$ und $B_{r,r+1}$

Es sei

$$J_1 = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{r+1,r} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\},$$

$$J_2 = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij} B_{r,r+1} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\},$$

$$B_1^h = \{B_{r+1,r} \left(\frac{\cdot}{h} - i, \frac{\cdot}{h} - j \right) : (i,j) \in J_1\},$$

$$B_2^h = \{B_{r,r+1} \left(\frac{\cdot}{h} - i, \frac{\cdot}{h} - j \right) : (i,j) \in J_2\},$$

$$S = \text{span } B_1^1 + \text{span } B_2^1.$$

Zunächst ist klar, daß

$\text{dist}(f, S_h) \leq \text{dist}(f, \text{span } B_v^h) = O(h^r)$, $v = 1, 2$ für alle $f \in C^r(I \times I)$ gilt. Ferner ist $\mathbb{P}_r \subset S_h$. Es gilt allerdings die folgende Aussage über die Approximationsordnung.

Satz 4.4.1: Es sei $f \in C^{r+1}(I \times I)$. Dann ist

$\text{dist}(f, S_h) = O(h^r)$ genau dann, wenn

$$f \in W \cap C^{r+1}(I \times I) = \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} g_i(x) y^i + \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(y) x^j : \right.$$

$$\left. g_i, \varphi_j \in C^{r+1}(I), i, j = 0, \dots, r-1 \right\} (W \text{ in (2.3.14)}).$$

Beweis: Es sei $f \in C^{r+1}(I \times I)$, und es gebe α_{ij}^h , $(i,j) \in J_1$, β_{ij}^h , $(i,j) \in J_2$ mit

$$(4.4.1) \quad f(x,y) - \sum_{(i,j) \in J_1} \alpha_{ij}^h B_{r+1,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \sum_{(i,j) \in J_2} \beta_{ij}^h B_{r,r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = O(h^r)$$

gleichmäßig auf $I \times I$.

Nach Satz 2.3.4 folgt

$$(4.4.2a) \quad D_{r,0} f(x,y) - \frac{1}{h^r} \sum_{i=-r+1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\nabla_{r,0} \alpha_{ij}^h) B_{1,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = O(1).$$

$$(4.4.2b) \quad D_{0,r} f(x,y) - \frac{1}{h^r} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=-r+1}^{N-1} (\nabla_{0,r} \beta_{ij}^h) B_{r,1}(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j) = o(1).$$

Nun sei (λ_i^h) Dualbasis zu $B_r(\frac{\cdot}{h}-j)$. Dann ist (Γ_{ij}^h) mit $\Gamma_{ij}^h \varphi := \lim_{x \rightarrow ih+} \lambda_j^h \varphi(x, \cdot)$ Dualbasis zu $B_{1,r}(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j)$.

Nach Abschnitt 1.3 kann man ohne Einschränkung annehmen, daß der Träger in $I \times I$ liegt.

$$\Rightarrow \Gamma_{lm}^h(D_{r,0} f) = D_{r,0} f(lh, mh) + o(h).$$

Durch Anwendung der Dualbasis (Γ_{lm}^h) auf (4.4.2a) ergibt sich

$$(4.4.3a) \quad D_{r,0} f(lh, mh) - \frac{1}{h^r} \nabla_{r,0} \alpha_{lm}^h = o(1),$$

$$l = -r+1, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, N-1.$$

Ebenso folgt aus (4.4.2b)

$$(4.4.3b) \quad D_{0,r} f(lh, mh) - \frac{1}{h^r} \nabla_{0,r} \beta_{lm}^h = o(1),$$

$$l = 0, \dots, N-1, \quad m = -r+1, \dots, N-1.$$

Nun brauchen wir eine Verallgemeinerung von Lemma 4.2.1.

Lemma 4.4.1: Es sei $\psi \in C^{r+1}(I)$, $h = \frac{1}{N}$.

$$h^r \sum_{l_{r-1}=0}^1 \sum_{l_{r-2}=0}^{l_{r-1}} \dots \sum_{l_0=0}^{l_1} D_r \psi(l_0 h) =$$

$$= \psi(ih) + q_{r-1}(i) + o(h)$$

gleichmäßig bezüglich $i = 0, \dots, N$.

Dabei ist $q_{r-1} \in \mathbb{P}_{r-1}$.

Beweis des Lemmas durch Induktion:

Für $r=1$ ist dies Lemma 4.2.1. Sei $\psi \in C^{r+2}$ und für r sei die Behauptung bereits bewiesen. Dann ist

$$h^{r+1} \sum_{l_r=0}^1 \dots \sum_{l_0=0}^{l_1} D_{r+1} \psi(l_0 h) =$$

$$\begin{aligned}
 &= h \sum_{l_r=0}^i \left[h^r \sum_{l_{r-1}=0}^{l_r} \dots \sum_{l_0=0}^{l_1} D_r(\psi'(l_0 h)) \right] \stackrel{\text{Induktion}}{=} \\
 &= h \sum_{l_r=0}^i \psi'(l_r h) + h \sum_{l_r=0}^i q_{r-1}(l_r) + 0(h) \stackrel{\text{Lemma 4.2.1}}{=} \\
 &= \psi(ih) - \psi(0) + 0(h) + h \sum_{l_r=0}^i q_{r-1}(l_r) + 0(h) = \\
 &= \psi(ih) + q_r(i) + 0(h) \quad \text{mit}
 \end{aligned}$$

$$q_r(i) := h \sum_{l_r=0}^i q_{r-1}(l_r) - \psi(0) .$$

Wegen $q_{r-1} \in \mathbb{P}_{r-1}$ ist $q_r \in \mathbb{P}_r$. Die Konstanten in $0(h)$ hängen nur von der Supremumsnorm der Ableitungen von ψ ab. Damit ist Lemma 4.4.1 bewiesen.

Wir wenden Lemma 4.4.1 und (1.3.10) auf (4.4.3a) an.

$$\begin{aligned}
 (4.4.4a) \quad & \sum_{l_{r-1}=0}^i \dots \sum_{l_0=0}^{l_1} \left[h^r D_{r,0} f(l_0 h, j h) - \nabla_{r,0} \alpha_{l_0,j}^h \right] = \\
 &= o(1) = f(ih, jh) - \alpha_{ij}^h - \tilde{g}_1^h(i, j), \text{ wobei } \tilde{g}_1^h(\cdot, j) \in \mathbb{P}_{r-1} \quad \forall j.
 \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}
 (4.4.4b) \quad & \sum_{l_{r-1}=0}^j \dots \sum_{l_0=0}^{l_1} \left[h^r D_{0,r} f(ih, l_0 h) - \nabla_{0,r} \beta_{i,l_0}^h \right] = \\
 &= o(1) = f(ih, jh) - \beta_{ij}^h - \tilde{g}_2^h(i, j) \text{ mit } \tilde{g}_2^h(i, \cdot) \in \mathbb{P}_{r-1} \quad \forall i.
 \end{aligned}$$

Beachte

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(i,j) \in J_1} \tilde{g}_1^h(i, j)_{B_{r+1}, r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = \\
 &= \sum_{j=-r+1}^{N-1} \left[\sum_{i=-r}^{N-1} \tilde{g}_1^h(i, j)_{B_{r+1}} \left(\frac{x}{h} - i \right) \right]_{B_r} \left(\frac{y}{h} - j \right) \\
 &= \sum_{j=-r+1}^{N-1} \varphi_1^h(x, j)_{B_r} \left(\frac{y}{h} - j \right) =: g_1^h(x, y) .
 \end{aligned}$$

Dabei ist für alle $j = -r+1, \dots, N-1$

$\varphi_1^h(., j) \in \mathbb{P}_{r-1}$ (wegen (1.3.1)) und daher $g_1^h(., y) \in \mathbb{P}_{r-1} \forall y \in I$.

Ebenso

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in J_2} \tilde{g}_2^h(i, j) B_{r, r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = \\ & = \sum_{i=-r+1}^{N-1} \varphi_2^h(i, y) B_r \left(\frac{x}{h} - i \right) =: g_2^h(x, y) . \end{aligned}$$

$\forall i = -r+1, \dots, n-1$ ist

$$\varphi_2^h(i, .) \in \mathbb{P}_{r-1} \quad \text{und} \quad g_2^h(x, .) \in \mathbb{P}_{r-1} \quad \forall x \in I .$$

Setzt man (4.4.4) in (4.4.1) ein, so ergibt sich

$$(4.4.5) \quad f(x, y) - g_1^h(x, y) - g_2^h(x, y) = o(1)$$

gleichmäßig auf $I \times I$.

Nun ist $W = C(I) \otimes \mathbb{P}_{r-1} + \mathbb{P}_{r-1} \otimes C(I)$ abgeschlossen in $C(I \times I)$, und wegen $g_1^h + g_2^h \in W$ folgt $f \in W$.

Ist umgekehrt $f \in W$, so gibt es $\psi_i, \varphi_j \in C^{r+1}(I)$ mit

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{r-1} \psi_i(x) y^i + \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(y) x^j .$$

$$\text{Aus } \text{dist}(g, \text{span}(\tau_i B_{r+1}(\frac{\cdot}{h}), i=-r, \dots, N-1)) = O(h^{r+1})$$

für $g \in \{\psi_1, \dots, \psi_{r-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}\}$ und

$1, x, \dots, x^{r-1} \in \text{span}(\tau_i B_r(\frac{\cdot}{h}), i=-r+1, \dots, N-1)$ folgt

$$\text{dist}(f, S_h) = O(h^{r+1}) .$$

q.e.d.

Wir geben noch ein Resultat über die Approximationsordnung eines modifizierten Splineraumes an.

Satz 4.4.2: Es sei

$$S := \text{span}(\tau_{ij} B_{r+1, r}, \tau_{ij} B_{r, r+1}, \tau_{ij} B_{r, r} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2) .$$

Dann ist $\text{dist}(f, S_h) = O(h^{r+1})$.

Beweis: Definiere $\varphi := B_{r+1,r} + B_{r,r+1} - B_{r,r}$.

Dann gilt

$$\hat{\varphi}(0) = 0 \quad \text{und} \quad D^\beta \hat{\varphi}(2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2) = 0 \\ \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \forall |\beta| \leq r.$$

Dies ist leicht nachzurechnen, wenn man

$$\hat{\varphi}(x,y) = (\rho(x))^{r+1}(\rho(y))^r + (\rho(x))^r(\rho(y))^{r+1} - (\rho(x)\rho(y))^r,$$

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(2\pi\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

beachtet, wobei

$$\rho(x) = \frac{1 - e^{-ix}}{ix}.$$

Satz 2.3.2 ergibt dann die Behauptung.

q.e.d.

4.5 Approximationsordnung von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$, $r \in \mathbb{N}$.

Nach Satz 2.3.6 gilt für alle $f \in C^{2r+1}(I \times I)$

$$\text{dist}(f, (S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)}))_h) = o(h^{2r+1}).$$

Sei nun $f \in C^{2r+2}(I \times I)$ und

$$\text{dist}(f, (S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)}))_h) = o(h^{2r+1}).$$

Es sei $J_1 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{r+1,r,r+1}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\}$

und $J_2 := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } \tau_{ij}^{B_{r,r+1,r+1}} \cap (0,N)^2 \neq \emptyset\}$.

Wegen Satz 2.3.1 kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß es α_{ij}^h , $(i,j) \in J_1$, β_{ij}^h , $(i,j) \in J_2$ gibt mit

$$f(x,y) - \sum_{(i,j) \in J_1} \alpha_{ij}^h B_{r+1,r,r+1}\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right) - \\ - \sum_{(i,j) \in J_2} \beta_{ij}^h B_{r,r+1,r+1}\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right) = o(h^{2r+1})$$

gleichmäßig auf $I \times I$.

Durch Anwendung von Satz 2.3.4 ergibt sich

$$D_{0,0,r+1} f(x,y) - \frac{1}{h^{r+1}} \sum_{i=-r}^{N-1} \sum_{j=-r+1}^{N-1} (\nabla_{0,0,r+1}^{\alpha_{ij}^h}) B_{r+1,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) \\ - \frac{1}{h^{r+1}} \sum_{i=-r+1}^{N-1} \sum_{j=-r}^{N-1} (\nabla_{0,0,r+1}^{\beta_{ij}^h}) B_{r,r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1) .$$

Dies induziert nach Satz 4.4.1

$$D_{0,0,r+1} f \in \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \psi_i(x) y^i + \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(y) x^j : \right. \\ \left. \psi_1, \dots, \psi_{r-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1} \in C^{r+1}(I) \right\} .$$

Dies ist eine Einschränkung an die Allgemeinheit von f , weshalb $2r+1$ die exakte Approximationsordnung von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$ ist.

Satz 4.5.1: Die exakte Approximationsordnung von $S_{3r}^{2r-1}(\Delta^{(1)})$ ist $2r+1$.

Anmerkung: Für die bisherige obere Schranke gilt $m_1(3r, 2r-1) = 2r+2$.

4.6 Approximationsordnung von $S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$, $r \geq 2$

Nach [65, Theorem 3.1] gilt für alle $f \in C^{2r+1}(I \times I)$

$$\text{dist}(f, (S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)}))_h) = O(h^{2r+1}) .$$

Die Boxsplines in $S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)})$ sind nach (2.2.4)

$$B_{r+1,r-1,r+1}, B_{r,r,r+1}, B_{r-1,r+1,r+1}, B_{r,r,r} .$$

Wir zeigen:

Satz 4.6.1: Die exakte Approximationsordnung von

$$S_{3r-1}^{2r-2}(\Delta^{(1)}) \text{ ist } 2r+1 \text{ falls } r \geq 2 .$$

Beweis: Es sei $f \in C^{2r+2}(I \times I)$, und es gebe $\alpha_{ij}^{v,h}, \beta_{ij}^h$,
 $v = 1, 2, 3$ mit

$$\begin{aligned} (4.6.1) \quad f(x,y) &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij}^{1,h} B_{r+1,r-1,r+1}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) - \\ &- \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij}^{2,h} B_{r,r,r+1}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) - \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij}^{3,h} B_{r-1,r+1,r+1}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) - \\ &- \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \beta_{ij}^h B_{r,r,r}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) = o(h^{2r+1}) \end{aligned}$$

gleichmäßig auf $I \times I$.

Nach Satz 2.3.4 folgt

$$D_{r,0,r+1} f(x,y) - \frac{1}{h^{2r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r,0,r+1} \alpha_{ij}^{1,h} B_{1,r-1}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) = o(1)$$

und

$$D_{r,r+1,0} f(x,y) - \frac{1}{h^{2r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r,r-1,2} \alpha_{ij}^{1,h} B_{1,0,r-1}\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h}-j\right) = o(1).$$

(Die letzte Gleichung ergibt sich unter Beachtung von $D_{r,r+1,0} = D_{r,r-1,2} + D_{r+2,r-1,0} - 2D_{r+1,r-1,1}$ und der Tatsache, daß die Anwendung von $D_{r+2,r-1,0}$ und $D_{r+1,r-1,1}$ auf $B_{r+1,r-1,r+1}$ auf nichtreguläre Distributionen führt).

Wendet man wie im Beweis von Satz 4.4.1 eine Dualbasis an, erhält man (da $r-1 \geq 1$)

$$(4.6.2a) \quad D_{r,0,r+1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2r+1}} \nabla_{r,0,r+1} \alpha_{ij}^{1,h} = o(1)$$

$$(4.6.2b) \quad D_{r,r+1,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2r+1}} \nabla_{r,r-1,2} \alpha_{ij}^{1,h} = o(1) .$$

Aus (4.6.2b) ergibt sich

(4.6.3a)

$$\sum_{l_{r-2}=0}^j \dots \sum_{l_0=0}^1 \left[h^{r-1} D_{r,r+1,0} f(ih, l_0 h) - \frac{1}{h^{r+2}} \nabla_{r,r-1,2} \alpha_{i,l_0}^{1,h} \right] =$$

$$= o(1) = D_{r,2,0} f(ih, jh) - \frac{1}{h^{r+2}} \nabla_{r,0,2} \alpha_{ij}^{1,h}$$

$$+ \tilde{g}_2^h(i, j) + o(h) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{g}_2^h(i, \cdot) \in \mathbb{P}_{r-2} \quad \forall i.$$

(r-1)-malige geschachtelte Summation liefert dieses Ergebnis unter Berücksichtigung von (1.3.10) und Lemma 4.4.1. Ebenso ergibt sich aus (4.6.2a) durch (r-1)-malige geschachtelte Summation bzgl. der dritten Richtung

$$(4.6.3b) \quad D_{r,0,2} f(ih, jh) - \frac{1}{h^{r+2}} \nabla_{r,0,2} \alpha_{ij}^{1,h} + \tilde{g}_1^h(i, j) = o(1) .$$

$$\text{mit } \psi(1) := \tilde{g}_1^h(i+1, j+1) \in \mathbb{P}_{r-2} .$$

Durch Subtraktion

$$(4.6.4) \quad (D_{r,0,2} - D_{r,2,0}) f(ih, jh) + \tilde{g}_1^h(i, j) - \tilde{g}_2^h(i, j) = o(1) .$$

Wähle $M = [\frac{N}{3}]$ und bilde den Differenzenoperator

$$\Gamma = (\tau_0 - \tau_{Mhe_2})^{r-1} (\tau_0 - \tau_{Mh(e_1+e_2)})^{r-1} .$$

Auf $[\frac{2}{3}, 1]^2$ folgt dann

$$\Gamma(D_{r,0,2} - D_{r,2,0}) f(ih, jh) = o(1) ,$$

und dies ist eine Einschränkung an die Allgemeinheit von f .

q.e.d.

Anmerkung: Bisher war die obere Schranke

$m_1(3r-1, 2r-2) = 2r+2$ bekannt.

4.7 Approximationsordnung von $S_{2\mu+2}^\mu(\Delta^{(1)})$, $\mu \in \mathbb{N}$

Nach Satz 2.3.8 kann die Approximationsordnung $2\mu+2$ garantiert werden. Hier wollen wir zeigen:

Satz 4.7.1: Die exakte Approximationsordnung von

$$S_{2\mu+2}^\mu(\Delta^{(1)}) \text{ ist } 2\mu+2 \text{ falls } \mu \geq 1.$$

In einigen Fällen benötigen wir eine formale Modifikation von (1.3.9) und Lemma 4.4.1. Es sei $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_i = 0$ für $i < -m$. Dann kann eine Summation wie in (1.3.9) als diskrete Faltung mit c_1 aufgefaßt werden:

$$((a_i) * c_1)(j) = \sum_{l=-m}^j a(l)$$

Insbesondere gilt dann $(\nabla_1 a_i) * c_1 = (a_i)$, woraus

$$(4.7.1) \quad (\nabla_r a_i) * c_r = (a_i)$$

folgt. Oft ist $\nabla_r a_i$ nur für $i \geq 0$ gegeben. Setzen wir

$$\nabla_r a_i = \nabla_r a_i c_1(i) + b_i, \text{ wobei}$$

$$b_i = \begin{cases} \nabla_r a_i & \text{falls } i < 0 \\ 0 & \text{falls } i \geq 0 \end{cases},$$

so hat (b_i) kompakten Träger, und es wird

$$(4.7.2) \quad ((\nabla_r a_i c_1(i)) * c_r)(j) = a_j - \sum_{l=-m}^{-1} b_l \tau_l c_r(j)$$

Man beachte, daß im Bereich $j \geq 0$ der zusätzliche Term ein Polynom aus $\mathbb{P}_{r-1}$ ist. Auch Lemma 4.2.1 kann mit dem neuen Formalismus geschrieben werden:

$$(4.7.3) \quad h(\psi'(.h)c_1) * c_1 = \psi(.h)c_1 - \psi(0)c_1 + 0(h)c_1$$

gleichmäßig auf $(-\infty, N-1] \cap \mathbb{Z}$ für $\psi \in C^1(I)$.

Dabei werden $\psi'(.h)c_1$ und $\psi(.h)c_1$ als Funktionen auf $(-\infty, N-1] \cap \mathbb{Z}$ aufgefaßt, die auf $(-\infty, -1] \cap \mathbb{Z}$ verschwinden.

Durch Induktion folgt eine andere Version von Lemma 4.4.1:

Lemma 4.7.1: Es sei $\psi \in C^{r+1}(I)$, $h = 1/N$.

Dann ist

$$h^r (D_r \psi(.h) c_1) * c_r = \psi(.h) c_1 - \sum_{l=0}^{r-1} h^l D_l \psi(0) c_{l+1} + o(h) c_1$$

gleichmäßig auf $(-\infty, N] \cap \mathbb{Z}$.

Beweis von Satz 4.7.1: Nach (2.2.4) lauten die Boxsplines vom Grad $2\mu+2$ in $S_{2\mu+2}^\mu(\Delta^{(1)})$: $B_{\mu+2-\sigma, \sigma, \mu+2}$, $\sigma = 0, \dots, \mu+2$. Alle anderen Boxsplines haben einen Grad $\leq 2\mu+1$. Für $f \in C^{2\mu+3}(I \times I)$ nehmen wir an

$$(4.7.4) \quad f(x, y) - \sum_{\sigma=0}^{\mu+2} \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij}^{\sigma, h} B_{\mu+2-\sigma, \sigma, \mu+2} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - s_h(x, y) = o(h^{2\mu+2})$$

gleichmäßig auf $I \times I$. Dabei ist s_h eine Linearkombination von Boxsplines vom Grad $\leq 2\mu+1$. Durch Differentiation von (4.7.4) ergibt sich

$$(4.7.5a) \quad D_{\mu, 0, \mu+2} f(ih, jh) - \frac{1}{h^{2\mu+2}} \nabla_{\mu, 0, \mu+2} \alpha_{ij}^{1, h} = o(1), i, j = 0, \dots, N-1.$$

Ebenso

$$(4.7.5b) \quad D_{0, \mu, \mu+2} f(ih, jh) - \frac{1}{h^{2\mu+2}} \nabla_{0, \mu, \mu+2} \alpha_{ij}^{\mu+1, h} = o(1).$$

Faltet man (4.7.5a) diskret mit $c_{1, 0, 0}$ und dann mit $c_{0, 0, 1}$, also insgesamt mit $c_{1, 0, 1}$, so folgt wegen (4.7.2) und Lemma 4.7.1 mit $r=1$:

$$(4.7.6a) \quad D_{\mu-1, 0, \mu+1} f(ih, jh) - \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{\mu-1, 0, \mu+1} \alpha_{ij}^{1, h} + \sum_{l=-m}^0 g_l^{(2)} * \tau_{1, 0} c_{1, 0, 1} + \sum_{l=-m}^0 \tilde{g}_l^{(1)} * \tau_{1, 1} c_{0, 0, 1} + \sum_{l=-m}^0 \tilde{g}_l^{(2)} * \tau_{1, 1} c_{0, 0, 1} = o(1).$$

Dabei haben $\tilde{g}_1^{(1)}$ den Träger in $\{0, \dots, N-1\} \times \{0\}$ und $g_1^{(2)}, \tilde{g}_1^{(2)}$ den Träger in $\{0\} \times \{0, \dots, N-1\}$. Ebenso ergibt diskrete Faltung von (4.7.5b) mit $c_{0,1,1}$

$$(4.7.6b) \quad D_{0,\mu-1,\mu+1} f(ih, jh) = \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{0,\mu-1,\mu+1} \alpha_{ij}^{\mu+1,h} + \\ + \sum_{l=-m}^0 \varphi_l^{(1)} * \tau_{0,l} c_{0,1,1} + \sum_{l=-m}^0 \tilde{\varphi}_l^{(1)} * \tau_{1,l} c_{0,0,1} + \\ + \sum_{l=-m}^0 \tilde{\varphi}_l^{(2)} * \tau_{1,l} c_{0,0,1} = o(1) .$$

Obere Indizes v deuten dabei wieder an, daß der Träger der Funktion in $\mathbb{N}_0^z$ mit $z=e_v$ für $v=1,2$ und $z=e_1+e_2$ für $v=3$ liegt. Nun wenden wir den Differentialoperator

$$(4.7.7) \quad P = D_{\mu+2,\mu} + (\mu+2)D_{\mu+1,\mu+1} + D_{\mu,\mu+2}$$

auf (4.7.4) an. Wir zeigen, daß $P B_{\mu+2-\sigma,\sigma,\mu+2}$ nur für $\sigma=1$ und $\sigma=\mu+1$ auf reguläre Anteile führt. Unmittelbar klar ist, daß diese Distributionen für $\sigma=2, \dots, \mu$ nichtregulär sind. Wir zeigen nun, daß $P B_{\mu+2,0,\mu+2}$ nichtregulär ist. $D_{\mu+2,\mu} B_{\mu+2,0,\mu+2}$ ist nichtregulär. Mit

$$D_{0,1} = D_{0,0,1} - D_{1,0} \text{ ergibt sich}$$

$$((\mu+2)D_{\mu+1,\mu+1} + D_{\mu,\mu+2}) B_{\mu+2,0,\mu+2} = \\ = (\mu+2) \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu+1}{i} (-1)^{\mu+1-i} D_{2\mu+2-i,0,i} B_{\mu+2,0,\mu+2} + \\ + \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu+2}{i} (-1)^{\mu+2-i} D_{2\mu+2-i,0,i} B_{\mu+2,0,\mu+2} + D_{1,0,\mu+2} B_{\mu+2,0,\mu+2},$$

und dies ist eine nichtreguläre Distribution. Aus Symmetriegründen ist auch $P B_{0,\mu+2,\mu+2}$ nichtregulär. Man rechnet ferner leicht nach, daß $P B_{\mu+1,1,\mu+1} = D_{\mu,\mu+2} B_{\mu+1,1,\mu+1} + s_1 = \nabla_{\mu,1,\mu+1} B_{1,0,1} + s_2$, wobei s_1 und s_2 nichtregulär sind.

Ebenso ist $P B_{\mu+1,1,\mu+1} = \nabla_{1,\mu,\mu+1} B_{0,1,1} + s_3$ mit s_3 nichtregulär. Nach Anwendung von P auf (4.7.4) und Bildung

von $\lim_{\substack{x \rightarrow ih+, y \rightarrow jh+ \\ y-jh < x-ih}}$ folgt

$$(4.7.8) \quad Pf(ih, jh) - \frac{1}{h^{2\mu+2}} \nabla_{\mu, 1, \mu+1} \alpha_{ij}^{1, h} - \\ - \frac{1}{h^{2\mu+2}} \nabla_{1, \mu, \mu+1} \alpha_{i, j-1}^{\mu+1, h} = o(1).$$

Dies faltet man mit $c_{1,1}$ und erhält

$$(4.7.9) \quad (D_{\mu+1, \mu-1} + (\mu+2) D_{\mu, \mu} + D_{\mu-1, \mu+1}) f(ih, jh) - \\ - \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{\mu-1, 0, \mu+1} \alpha_{ij}^{1, h} - \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{0, \mu-1, \mu+1} \alpha_{i, j-1}^{\mu+1, h} + \\ + \sum_{l=-m}^0 u_l^{(2)} * \tau_{1, 0} c_{1, 0} + \sum_{l=-m}^0 v_l^{(1)} * \tau_{0, 1} c_{0, 1} = o(1).$$

Nun löst man (4.7.6a) nach $\frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{\mu-1, 0, \mu+1} \alpha_{ij}^{1, h}$ und (4.7.6b)

nach $\frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{0, \mu-1, \mu+1} \alpha_{ij}^{\mu+1, h}$ auf und setzt die Ausdrücke in

(4.7.9) ein:

$$(4.7.10) \quad (D_{\mu+1, \mu-1} + (\mu+2) D_{\mu, \mu} + D_{\mu-1, \mu+1} - D_{\mu-1, 0, \mu+1} - \\ - D_{0, \mu-1, \mu+1}) f(ih, jh) + R_h(i, j) = o(1),$$

wobei $R_h = R_h(i, j)$ folgende Gestalt hat:

$$(4.7.11) \quad R_h = \sum_{l=-m}^0 w_{1,1}^{(2)} * \tau_{1, 0} c_{1, 0} + \sum_{l=-m}^0 w_{1,2}^{(1)} * \tau_{0, 1} c_{0, 1} + \\ + \sum_{l=-m}^0 (w_{1,3}^{(1)} + w_{1,4}^{(2)}) * \tau_{1, 1} c_{0, 0, 1} + \sum_{l=-m}^0 w_{1,5}^{(2)} * \tau_{1, 0} c_{1, 0, 1} + \\ + \sum_{l=-m}^0 w_{1,6}^{(1)} * \tau_{0, 1} c_{0, 1, 1}.$$

Nach [70, (2.10)] gilt für diskrete Conesplines analog zu (1.2.3)

$$(4.7.12) \quad \nabla_{\alpha, \beta, \gamma, \eta} c_{r, s, t, v} = c_{r-\alpha, s-\beta, t-\gamma, v-\eta}$$

falls $r \geq \alpha$, $s \geq \beta$, $t \geq \gamma$, $v \geq \eta$. Für $\rho \in \mathbb{N}_0$ sei

$$(4.7.13) \quad M_\rho := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |j| \leq \rho\} \cup \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq \rho\} \cup \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |i-j| \leq \rho\}.$$

Aus (4.7.12) folgt unter Beachtung von $g * c_{o,o,o} = g$ für alle Folgen g , daß es ein $\rho \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$(4.7.14) \quad \text{supp } \nabla_{1,1,1} R_h \subset M_\rho \text{ für alle } h.$$

Nun ist

$$(4.7.15) \quad \Gamma_M := (\tau_o - \tau_{M+1,o}) (\tau_o - \tau_{o,M+1}) (\tau_o - \tau_{M+1,M+1}) = \\ = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M \sum_{l=0}^M \tau_{i+1,j+1} \nabla_{1,1,1} \quad (M \in \mathbb{N}_o).$$

Man wende Γ_M auf (4.7.10) gedeutet als Funktion der diskreten Variablen (i,j) in einem Punkt an, so daß alle Funktionsauswertungen der in (4.7.15) auftretenden Summe in $(\mathbb{Z}^2 \cap [0, N-1]^2) \setminus M_\rho$ liegen. Wegen (4.7.14) ist $\Gamma_M R_h = 0$, und daher ergibt sich eine Einschränkung an die Allgemeinheit der Funktion f . q.e.d.

Anmerkung: Bisher war die obere Schranke $m_1(2\mu+2, \mu) = 2\mu+3$ bekannt.

4.8 Approximationsordnung von $S_{2\mu+1}^\mu(\Delta^{(1)})$, $\mu \in \mathbb{N}$

Wir zeigen

Satz 4.8.1: Die exakte Approximationsordnung von

$$S_{2\mu+1}^\mu(\Delta^{(1)}), \quad \mu \in \mathbb{N} \text{ liegt in } [2\mu, 2\mu+1].$$

Beweis: Nach Satz 2.3.7 ist $m_1(2\mu+1, \mu) = 2\mu$ eine untere Schranke. (2.2.4) liefert die Boxsplines $B_{\mu+2-\sigma, \sigma, \mu+1}$, $\sigma = 1, \dots, \mu+1$ vom Grad $2\mu+1$. Wir nehmen an, daß

$$(4.8.1) \quad f(x,y) - \sum_{\sigma=1}^{\mu+1} \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(\sigma)} B_{\mu+2-\sigma,\sigma,\mu+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - s_h = o(h^{2\mu+1})$$

gleichmäßig auf $I \times I$ und in h gilt. s_h ist dabei eine Linearkombination von Boxsplines vom Grad $\leq 2\mu$. Wendet man $D_{\mu,0,\mu+1}$ auf (4.8.1) an und beachtet, daß $D_{\mu,0,\mu+1}s_h$ nicht-regulär ist, so erhält man wegen Satz 2.3.4

$$D_{\mu,0,\mu+1} f(x,y) - \frac{1}{h^{2\mu+1}} \sum_{i,j} \nabla_{\mu,0,\mu+1} \alpha_{ij}^{(1)} B_{1,1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1) \Rightarrow$$

$$D_{\mu,0,\mu+1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2\mu+1}} \nabla_{\mu,0,\mu+1} \alpha_{ij}^{(1)} = o(1) .$$

Wir summieren nun bezüglich der dritten Richtung und erhalten

$$(4.8.2a) \quad D_{\mu,0,\mu} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{\mu,0,\mu} \alpha_{ij}^{(1)} + g_1^h(i-j) = o(1) .$$

Nun wendet man $D_{\mu,\mu+1,0} = D_{\mu,1,\mu} + \sum_{\rho=0}^{\mu-1} \binom{\mu}{\rho} (-1)^{\mu-\rho} D_{2\mu-\rho,1,\rho}$ auf (4.8.1) an, weshalb

$$D_{\mu,\mu+1,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2\mu+1}} \nabla_{\mu,1,\mu} \alpha_{ij}^{(1)} = o(1) .$$

Nach Summation bezüglich der zweiten Richtung erhält man

$$(4.8.2b) \quad D_{\mu,\mu,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2\mu}} \nabla_{\mu,0,\mu} \alpha_{ij}^{(1)} + g_2^h(i) = o(1) .$$

Subtraktion von (4.8.2a) und (4.8.2b) liefert

$$(4.8.3) \quad (D_{\mu,\mu,0} - D_{\mu,0,\mu}) f(ih,jh) + g_2^h(i) - g_1^h(i-j) = o(1)$$

Die Anwendung des Differenzenoperators $\Gamma_M :=$

$:= (\tau_O - \tau_{O,M})(\tau_O - \tau_{M,M})$ auf (4.8.3) als Funktion von (i,j) führt zum Widerspruch, da die Allgemeinheit von f eingeschränkt wird. q.e.d.

Anmerkung: Bisher war die obere Schranke

$m_1(2\mu+1,\mu) = 2\mu+2$ bekannt.

4.9 Approximationsordnung von $S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$

Satz 2.3.6 liefert $3r+2$ als untere Schranke für die Approximationsordnung. Wir beweisen

Satz 4.9.1: Die exakte Approximationsordnung von

$S_{4r+1}^{3r}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$ ist $3r+2$.

Beweis: (2.2.10) liefert die Boxsplines $B_{r+1,r,r+1,r+1}$ und $B_{r+1,r+1,r+1,r}$. Wir nehmen an, daß

$$(4.9.1) \quad f(x,y) - \sum_{i,j} \alpha_{ij}^h B_{r+1,r,r+1,r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ - \sum_{i,j} \beta_{ij}^h B_{r+1,r+1,r+1,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h^{3r+2}).$$

Satz 2.3.4 liefert nach Anwendung von $D_{r+1,0,r+1,0}$

$$(4.9.2) \quad D_{r+1,0,r+1} f(x,y) - \\ - \frac{1}{h^{2r+2}} \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,0,r+1} \alpha_{ij}^h) B_{0,r,0,r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ - \frac{1}{h^{2r+2}} \sum_{i,j} (\nabla_{r+1,0,r+1} \beta_{ij}^h) B_{0,r+1,0,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h^r).$$

Nach Satz 4.4.1 ist dies eine Einschränkung der Allgemeinheit von f . q.e.d.

Anmerkung: Bisher war die obere Schranke

$m_2(4r+1,3r) = 3r+3$ bekannt.

4.10 Approximationsordnung von $S_{4r}^{3r-1}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$

$3r+1$ ist nach Satz 2.3.6 eine untere Schranke für die Approximationsordnung. Es gilt

Satz 4.10.1: Die exakte Approximationsordnung von

$$S_{4r}^{3r-1}(\Delta^{(2)}), \quad r \in \mathbb{N} \text{ ist } 3r+1.$$

Beweis: (2.2.10) liefert die Boxsplines

$B_{r+1, r-1+\sigma, r+1, r+1-\sigma}$, $\sigma = 0, \dots, 2$. Stattdessen können wir auch die Boxsplines $B_{r-1+\sigma, r+1-\sigma, r+1, r+1}$, $\sigma = 0, \dots, 2$ nehmen.
Annahme:

$$(4.10.1) \quad f(x, y) - \sum_{\sigma=0}^2 \alpha_{ij}^{\sigma, h} B_{r-1+\sigma, r+1-\sigma, r+1, r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h^{3r+1}).$$

Man wende $D_{r, r, r+1, 0}$ auf (4.10.1) an und beachte, daß Ableitungen bezüglich einer Richtung durch solche bezüglich anderer Richtungen ausgedrückt werden können. Wir erhalten

$$(4.10.2) \quad D_{r, r, r+1, 0} f(x, y) - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i, j} \nabla_{r-1, r, r+1, 1} \alpha_{ij}^{0, h} B_{0, 1, 0, r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) + \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i, j} \nabla_{r, r-1, r+1, 1} \alpha_{ij}^{2, h} B_{1, 0, 0, r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1).$$

Es sei $(\lambda_v^h)_{v \in \mathbb{Z}}$ eine Dualbasis zu $(\tau_{\rho} B_r(\frac{\cdot}{h}))_{\rho \in \mathbb{Z}}$ und λ_0^h habe den Träger in $[0, h]$ (vgl. Abschnitt 1.3). Definiere die Funktionale

$$\phi_{ij}^{1, h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_0^h g((ih, jh) + \varepsilon e_1 + (e_1 - e_2)),$$

$$\phi_{ij}^{2, h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \lambda_0^h g((ih, jh) + \varepsilon e_1 + (e_1 - e_2)).$$

Wendet man diese auf (4.10.2) an und addiert die Ergebnisse, so erhält man

$$(4.10.3a) \quad \begin{aligned} & 2D_{r,r,r+1,0} f(ih,jh) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-1,r,r+1,1} (\alpha_{ij}^{0,h} + \alpha_{i,j-1}^{0,h}) + \\ & + \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-1,r+1,1} (\alpha_{ij}^{2,h} + \alpha_{i-1,j}^{2,h}) = o(1) . \end{aligned}$$

Ebenso erhält man durch Anwendung von $D_{r,r,0,r+1}$ auf (4.10.1) und mittels der Funktionale

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{1,h} g &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_0^h g((ih,jh) + \varepsilon e_1 + (e_1 + e_2)) , \\ \psi_{ij}^{2,h} g &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \lambda_0^h g((ih,jh) + \varepsilon e_1 + (e_1 + e_2)) \end{aligned}$$

$$(4.10.3b) \quad \begin{aligned} & 2D_{r,r,0,r+1} f(ih,jh) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-1,r,1,r+1} (\alpha_{ij}^{0,h} + \alpha_{i,j-1}^{0,h}) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-1,1,r+1} (\alpha_{ij}^{2,h} + \alpha_{i-1,j}^{2,h}) = o(1) . \end{aligned}$$

Wir falten (4.10.3a) diskret mit $c_{r-1,r-1,r,0}$ und (4.10.3b) mit $c_{r-1,r-1,0,r}$.

$$(4.10.4a) \quad \begin{aligned} & 2D_{1,1,1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^3} \nabla_{0,1,1,1} (\alpha_{ij}^{0,h} + \alpha_{i,j-1}^{0,h}) + \\ & + \frac{1}{h^3} \nabla_{1,0,1,1} (\alpha_{ij}^{2,h} + \alpha_{i-1,j}^{2,h}) + \varphi_1^h(i,j) = o(1) \end{aligned}$$

$$(4.10.4b) \quad \begin{aligned} & 2D_{1,1,0,1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^3} \nabla_{0,1,1,1} (\alpha_{ij}^{0,h} + \alpha_{i,j-1}^{0,h}) - \\ & - \frac{1}{h^3} \nabla_{1,0,1,1} (\alpha_{ij}^{2,h} + \alpha_{i-1,j}^{2,h}) + \varphi_2^h(i,j) = o(1) \end{aligned}$$

Nach (4.7.2) und Lemma 4.7.1 treten Terme φ_k^h folgender Gestalt auf.

$$(4.10.5) \quad \sum_{v=1}^2 \sum_{\sigma_1=0}^r \dots \sum_{\sigma_4=0}^r \sum_{a \in L} g_{\sigma,a}^{(v)} * \tau_a c_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4},$$

wobei $L = \{(1,0), (0,1), (1,1), (1, N-1-1)\}$,

$1 = -m, \dots, 0\}$. Dabei ist der Träger von $g_{\sigma,a}^{(1)}$ in $\{0, \dots, N-1\} \times \{0\}$ und der von $g_{\sigma,a}^{(2)}$ in $\{0\} \times \{0, \dots, N-1\}$ enthalten (vgl. Abschnitt 4.7). Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (4.10.4) und Faltung mit $c_{0,1}$ bzw. $c_{1,0}$ führt zu

$$(4.10.6a) \quad 2(D_{1,0,1} + D_{1,0,0,1})f(ih, jh) -$$

$$- \frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,1,1} (\alpha_{ij}^{0,h} + \alpha_{i,j-1}^{0,h}) + \varphi_3^h = o(1),$$

$$(4.10.6b) \quad 2(D_{0,1,0,1} - D_{0,1,1})f(ih, jh) -$$

$$- \frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,1,1} (\alpha_{ij}^{2,h} + \alpha_{i-1,j}^{2,h}) + \varphi_4^h = o(1).$$

Durch Differentiation von (4.10.1) ergibt sich

$$(4.10.7) \quad D_{r-1,0,r+1,r+1} f(x,y) -$$

$$- \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r-1,0,r+1,r+1} \alpha_{ij}^{1,h} B_{1,r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) -$$

$$- \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r-1,0,r+1,r+1} \alpha_{ij}^{2,h} B_{2,r-2} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1).$$

Falls $r \geq 2$ gehen wir nun folgendermaßen vor.

Definiere

$$\Gamma_{ij}^h g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lambda_0^h g((ih, jh) + \varepsilon e_1 + \varepsilon e_2),$$

$A := \{(v, \sigma) : v = -1, 0, \sigma = 2-r, \dots, 0\}$, $A_\rho := \Gamma_{0,0}^1(\tau_\rho B_{2,r-1})$
für $\rho \in A$. Beachtet man, daß wegen (1.4.1)

$$(4.10.8) \quad \sum_{\rho \in A} A_{\rho} = 1$$

ist, so ergibt die Anwendung von Γ_{ij}^h auf (4.10.7)

$$(4.10.9) \quad \begin{aligned} & D_{r-1,0,r+1,r+1} f(ih,jh) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-1,0,r+1,r+1} \alpha_{ij}^{1,h} - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{\rho \in A} A_{\rho} \nabla_{r-1,0,r+1,r+1} \alpha_{(i,j)+\rho}^{2,h} = o(1) . \end{aligned}$$

Faltung mit $c_{r-1,0,r}$ induziert

$$(4.10.10) \quad \begin{aligned} & D_{0,0,1,1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,1,1} \alpha_{ij}^{1,h} - \\ & - \frac{1}{h^2} \sum_{\rho \in A} A_{\rho} \nabla_{0,0,1,1} \alpha_{(i,j)+\rho}^{2,h} + \varphi_5^h = o(1) . \end{aligned}$$

Differentiation von (4.10.1) liefert

$$(4.10.11) \quad \begin{aligned} & D_{0,r-1,r+1,r+1} f(x,y) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{0,r-1,r+1,r+1} \alpha_{ij}^{0,h} B_{r-1,2} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ & - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{0,r-1,r+1,r+1} \alpha_{ij}^{1,h} B_{r,1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1) . \end{aligned}$$

Sei wieder $r \geq 2$. Definiere

$$\Lambda_{ij}^h g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lambda_{\mathbf{0}}^h g((ih,jh) + \varepsilon e_2 + \varepsilon e_1) ,$$

$$G := \{(\nu, \sigma) : \sigma = -1, 0, \nu = 2-r, \dots, 0\}, \quad A'_{\rho} := \Lambda_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}^1(\tau_{\rho} B_{r-1,2})$$

für $\rho \in G$. Die Anwendung von Λ_{ij}^h auf (4.10.11) unter Beachtung von

$$(4.10.12) \quad \sum_{\rho \in G} A'_\rho = 1$$

führt zu

$$(4.10.13) \quad D_{0,r-1,r+1,r+1} f(ih,jh) - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{\rho \in G} A'_\rho \nabla_{0,r-1,r+1,r+1}^{\alpha_{0,h}}(i,j) + \rho - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{0,r-1,r+1,r+1}^{\alpha_{ij}^{1,h}} = o(1) .$$

Dies faltet man mit $c_{0,r-1,r,r}$.

$$(4.10.14) \quad D_{0,0,1,1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^2} \sum_{\rho \in G} A'_\rho \nabla_{0,0,1,1}^{\alpha_{0,h}}(i,j) + \rho - \\ - \frac{1}{h^2} \nabla_{0,0,1,1}^{\alpha_{ij}^{1,h}} + \varphi_6^h = o(1) .$$

Subtrahiert man (4.10.14) von (4.10.10), so ergibt sich

$$\frac{1}{h^2} \sum_{\rho \in G} A'_\rho \nabla_{0,0,1,1}^{\alpha_{0,h}}(i,j) + \rho - \frac{1}{h^2} \sum_{\rho \in A} A_\rho \nabla_{0,0,1,1}^{\alpha_{0,h}^2}(i,j) + \rho + \varphi_7^h = \\ = o(1) .$$

Mit (4.10.6), (4.10.8) und (4.10.12) erhält man hieraus

$$(4.10.15) \quad (D_{1,0,1} + D_{1,0,0,1} + D_{0,1,1} - D_{0,1,0,1}) f(ih,jh) + \\ + \psi^h(i,j) = o(1) .$$

Dabei ist $\psi^h = \sum_{a \in N} \tau_a \varphi_a^h$, wobei φ_a^h wie in

(4.10.5) und $N \subset \mathbb{Z}^2$ endlich und unabhängig von h ist.

Nun soll noch der Fall $r=1$ betrachtet werden. Aus

(4.10.7) folgt

$$(4.10.16) \quad D_{0,0,2,2} f(ih,jh) - \frac{1}{h^4} \nabla_{0,0,2,2} \alpha_{ij}^{1,h} = o(1) .$$

Durch Differentiation erhält man aus (4.10.1)

$$D_{0,2,2} f(ih,jh) + \frac{1}{h^4} \nabla_{0,1,2,1} \alpha_{ij}^{1,h} + \frac{2}{h^4} \nabla_{1,0,2,1} \alpha_{ij}^{2,h} = o(1) ,$$

$$D_{0,2,0,2} f(ih,jh) - \frac{1}{h^4} \nabla_{0,1,1,2} \alpha_{ij}^{1,h} + \frac{2}{h^4} \nabla_{1,0,1,2} \alpha_{ij}^{2,h} = o(1) .$$

Nach Faltung mit $c_{1,0}$ bzw. $c_{0,0,1}$ und Elimination von

$\nabla_{1,0,1,1} \alpha_{ij}^{2,h}$ folgt daraus

$$(4.10.17) \quad (D_{0,2,1} - D_{0,2,0,1}) f(ih,jh) + \frac{2}{h^3} \nabla_{0,1,1,1} \alpha_{ij}^{1,h} + \phi_8^h = \\ = o(1) .$$

Nun werden (4.10.16) mit $c_{0,0,1,1}$ und (4.10.17) mit

$c_{0,1}$ gefaltet und dann $\nabla_{0,0,1,1} \alpha_{ij}^{1,h}$ eliminiert.

$$(4.10.18) \quad (2D_{0,0,1,1} + D_{0,1,1} - D_{0,1,0,1}) f(ih,jh) + \phi_9^h = o(1) .$$

Es sei P der Differentialoperator von f in (4.10.15) bzw.

(4.10.18). Es ist für $M \in \mathbb{N}$

$$(4.10.19) \quad (\tau_0 - \tau_M)^x = \left(\sum_{l_r=0}^{M-1} \tau_{l_r} \nabla_{l_r} \right) \dots \left(\sum_{l_1=0}^{M-1} \tau_{l_1} \nabla_{l_1} \right) = \\ = \sum_{l_r=0}^{M-1} \dots \sum_{l_1=0}^{M-1} \tau_{l_1+\dots+l_r} \nabla_r$$

und daher

$$(4.10.20) \quad \Gamma_M := (\tau_O - \tau_{M,O})^x (\tau_O - \tau_{O,M})^x (\tau_O - \tau_{M,M})^x (\tau_O - \tau_{M,-M})^x \\ = \sum_{l \in L_M} \sum_{n \in L_M} \sum_{i \in L_M} \sum_{j \in L_M} \tau_{|l|+|i|+|j|, |n|+|i|-|j|} \nabla_{r,r,r,r}$$

wobei $L_M := \{(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}^r : 0 \leq l_i \leq M-1 \text{ für } i=1, \dots, r\}$.

Für $\rho \in \mathbb{N}_0$ sei

$$(4.10.21) \quad M_\rho^h := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |i| \leq \rho \text{ oder } |j| \leq \rho \text{ oder } |i-j| \leq \rho \text{ oder } |i+j-(N-1)| \leq \rho\}.$$

Wegen (4.7.12) gibt es $\rho \in \mathbb{N}$, so daß

$$(4.10.22) \quad \text{supp } \nabla_{r,r,r,r} \varphi_\nu^h \subset M_\rho^h \text{ für alle } h.$$

Wir wenden nun Γ_M auf (4.10.15) bzw. (4.10.18) an und betrachten dies auf einem Bereich, der ganz in $([0, N-1]^2 \cap \mathbb{Z}^2) \setminus M_\rho^h$ liegt. Dort ist wegen (4.10.22) $\tau_{\sigma} \nabla_{r,r,r,r} \varphi_\nu^h = 0$ für alle in (4.10.20) auftretenden Indizes σ und daher

$$(4.10.23) \quad \Gamma_M \text{Pf}(ih, jh) = o(1)$$

in diesem Gebiet. Γ_M wirkt dabei auf die diskrete Variablen (i, j) . (4.10.23) schränkt wiederum die Allgemeinheit von f ein.
q.e.d.

Anmerkung: Bisher war die obere Schranke

$$m_2(4r, 3r-1) = 3r+3 \text{ bekannt.}$$

4.11 Approximationsordnung von $S_{4r-1}^{3r-2}(\Delta^{(2)})$, $r \in \mathbb{N}$

Nach [67, Theorem 2.2] ist $3r+1$ eine untere Schranke für die Approximationsordnung. Wir zeigen

Satz 4.11.1: Die exakte Approximationsordnung von

$$S_{4r-1}^{3r-2}(\Delta^{(2)}) \text{ ist } 3r+1.$$

Beweis: Für $r=1$ ist 4 die exakte Approximationsordnung von $S_3^1(\Delta^{(2)})$.

Es sei nun $r \geq 2$. Nach (2.2.10) haben wir die Boxsplines

$$B_{r+1, r-2+\sigma, r+1, r+1-\sigma}, \sigma = 0, \dots, 3, B_{r, r, r, r}.$$

Wir können stattdessen auch $B_{r-2+\sigma, r+1-\sigma, r+1, r+1}$, $\sigma = 0, \dots, 3$ nehmen. Wir nehmen an:

$$(4.11.1) \quad f(x, y) - \sum_{\sigma=0}^3 \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{\sigma, h} B_{r-2+\sigma, r+1-\sigma, r+1, r+1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ - \sum_{i,j} \beta_{ij}^h B_{r, r, r, r} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(h^{3r+1})$$

gleichmäßig auf $I \times I$. Durch Differentiation von (4.11.1) erhält man

$$(4.11.2) \quad D_{r, r, r+1, 0} f(x, y) - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r-2, r, r+1, 2} \alpha_{ij}^{0, h} B_{0, 1, 0, r-1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r, r-2, r+1, 2} \alpha_{ij}^{3, h} B_{1, 0, 0, r-1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1).$$

Nun sei $(\lambda_{ij}^h)_{i,j \in \mathbb{Z}}$ eine Dualbasis zu $(B_{r-1}(\frac{\cdot}{h} - \rho))_{\rho \in \mathbb{Z}}$

mit $\text{supp } \lambda_{ij}^h \subset [0, h]$. Man definiere das lineare Funktional

$$\psi_{ij}^{1, h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_{ij}^h g((ih, jh) + \varepsilon e_1 + (e_1 - e_2)).$$

Wendet man dieses auf (4.11.2) an, so ergibt sich

$$(4.11.3a) \quad D_{r,r,r+1,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-2,r,r+1,2} \alpha_{ij}^{o,h} - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-2,r+1,2} \alpha_{ij}^{3,h} = o(1) .$$

Ebenso folgt mittels

$$\psi_{ij}^{2,h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \lambda_o^h g((ih,jh) + \varepsilon e_1 + . (e_1 - e_2))$$

$$(4.11.3b) \quad D_{r,r,r+1,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-2,r,r+1,2} \alpha_{i,j-1}^{o,h} - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-2,r+1,2} \alpha_{i-1,j}^{3,h} = o(1) .$$

Man falte (4.11.3) mit $c_{o,o,r-1,0}$ und addiere die beiden Gleichungen.

$$(4.11.4) \quad 2D_{r,r,2,0} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2r+2}} \nabla_{r-2,r,2,2} (\alpha_{ij}^{o,h} + \alpha_{i,j-1}^{o,h}) - \\ - \frac{1}{h^{2r+2}} \nabla_{r,r-2,2,2} (\alpha_{ij}^{3,h} + \alpha_{i-1,j}^{3,h}) + \varphi_1^h(i,j) = o(h) .$$

Nach (4.7.2) und Lemma 4.7.1 sind die Funktionen φ_k^h von der Gestalt

$$\sum_{v=1}^2 \sum_{\sigma_1=0}^{r-1} \sum_{\sigma_2=0}^{r-1} \sum_{a \in L} g_{\sigma,a}^{(v)} * \tau_a c_{o,o,\sigma_1,\sigma_2} ,$$

wobei $L = \{(1,1), (1,N-1-1), 1=-m, \dots, 0\}$ und $g_{\sigma,a}^{(1)}$ den Träger in $\{0, \dots, N-1\} \times \{0\}$ und $g_{\sigma,a}^{(2)}$ den Träger in $\{0\} \times \{0, \dots, N-1\}$ hat. Aus (4.11.1) folgt durch Differentiation

$$(4.11.5) \quad D_{r,r,o,r+1} f(x,y) - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r-2,r,2,r+1} \alpha_{ij}^{o,h} B_{o,1,r-1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \sum_{i,j} \nabla_{r,r-2,2,r+1} \alpha_{ij}^{3,h} B_{1,o,r-1} \left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j \right) = o(1) .$$

Hieraus ergibt sich durch Anwendung der linearen Funktionale

$$\psi_{ij}^{3,h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lambda_o^h g((ih,jh) + \varepsilon e_2 + . (e_1 + e_2))$$

$$(4.11.6a) \quad D_{r,r,o,r+1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-2,r,2,r+1} \alpha_{ij}^{o,h} - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-2,2,r+1} \alpha_{i-1,j}^{3,h} = o(1)$$

und durch Anwendung von

$$\psi_{ij}^{4,h} g := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_o^h g((ih,jh) + \varepsilon e_2 + \cdot (e_1 + e_2))$$

$$(4.11.6b) \quad D_{r,r,o,r+1} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r-2,r,2,r+1} \alpha_{i,j-1}^{o,h} - \\ - \frac{1}{h^{3r+1}} \nabla_{r,r-2,2,r+1} \alpha_{ij}^{3,h} = o(1) .$$

Nun falte man (4.11.6) mit $c_{o,o,o,r-1}$ und addiere die beiden Gleichungen.

$$(4.11.7) \quad 2D_{r,r,o,2} f(ih,jh) - \frac{1}{h^{2r+2}} \nabla_{r-2,r,2,2} (\alpha_{ij}^{o,h} + \alpha_{i,j-1}^{o,h}) - \\ - \frac{1}{h^{2r+2}} \nabla_{r,r-2,2,2} (\alpha_{ij}^{3,h} + \alpha_{i-1,j}^{3,h}) + \varphi_2^h(i,j) = o(1)$$

Subtraktion von (4.11.7) von (4.11.4) liefert

$$(4.11.8) \quad (2D_{r,r,2,o} - 2D_{r,r,o,2}) f(ih,jh) + \varphi_3^h(i,j) = o(1) .$$

Eine Einschränkung der Allgemeinheit von f ergibt sich nun wie in Abschnitt 4.10 durch Anwendung von

$$\Gamma_M = (\tau_o - \tau_{M,M})^{r-1} (\tau_o - \tau_{M,-M})^{r-1}$$

auf (4.11.8).

q.e.d.

Anmerkung: Bislang hatten wir die obere Schranke

$$m_2(4r-1,3r-2) = 3r+3 .$$

KAPITEL 5:

Interpolation in Splineräumen

In einer Dimension hat die Interpolation eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Theorie der Splines gespielt (vgl. [126]). In mehreren Dimensionen ist sie bislang nicht durchgeführt worden, wenn die Glattheit nicht zu klein in bezug auf den Grad ist. Zum Beispiel muß für die Glattheit 1 der Grad schon ≥ 5 sein [113]. Wir geben hier ein Verfahren zur Interpolation in $S_3^1(\Delta_{N,N}^{(1)})$ an. Nach Abschnitt 2.4.2 sind die minimalen Träger eines Splines bereits recht groß, so daß der Einfluß der Daten sich über viele Dreiecke erstreckt und daher eine lokale Interpolation wie bei den finiten Elementen nicht möglich ist. In Abschnitt 5.1 werden die eindimensionalen und in Abschnitt 5.2 die zweidimensionalen Bézierpolynome eingeführt. Abschnitt 5.3 bringt C^1 -Übergangsbedingungen und beschreibt das Interpolationsverfahren. Dabei werden sukzessive die Bézierordinaten berechnet, die die Koeffizienten der Bernsteinpolynome sind. Diese ergeben sich zum einen durch die passenden Interpolationsbedingungen, zum anderen durch die C^1 -Bedingungen. Die Beschreibung von Splines auf regulären Gittern mit Bézierordinaten wird vor allem in [77] gegeben. In Abschnitt 5.4 werden dann einige numerische Beispiele aufgeführt, die vor allem das in Kapitel 4 untersuchte Approximationsverhalten widerspiegeln. Die Beispiele wurden an der Großrechenanlage CDC Cyber 175 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München durchgeführt.

5.1 Bézierpolynome in einer Dimension

Im folgenden sollen Polynome auf dem Intervall $[U,V] \subset \mathbb{R}$ durch Bernsteinpolynome dargestellt werden. Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann eindeutig in der Form

$$(5.1.1) \quad x = uU + vV \quad \text{mit } u + v = 1$$

beschrieben werden. u und v heißen die baryzentrischen Koordinaten von x bezüglich U und V , und sie erfüllen

$$(5.1.2) \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad \text{auf } [U, V].$$

u und v sind lineare Polynome als Funktionen von x .

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißen

$$(5.1.3) \quad B_{i,j}^n(u,v) = \frac{n!}{i!j!} u^i v^j, \quad i, j \geq 0, \quad i + j = n$$

Bernsteinspolynome vom Grad n . Für sie gilt über dem Intervall $[U, V]$

$$(5.1.4) \quad 0 \leq B_{i,j}^n(u,v) \leq 1$$

$$(5.1.5) \quad \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} B_{i,j}^n(u,v) = 1.$$

Wir setzen

$$(5.1.6) \quad J_n := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i,j \text{ und } i+j = n\}.$$

Nun ist $(B_{i,j}^n)_{(i,j) \in J_n}$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$, weshalb jedes

Polynom $\bar{\varphi}_n(x) = \phi_n(u,v)$ aus $\mathbb{P}_n$ eindeutig in der Form

$$(5.1.7) \quad \bar{\varphi}_n(x) = \phi_n(u,v) = \sum_{(i,j) \in J_n} b_{i,j} B_{i,j}^n(u,v)$$

geschrieben werden kann. Ein Polynom in der Darstellung

(5.1.7) heißt Bézierpolynom und die Koeffizienten $b_{i,j}$ Bézierordinaten. Für $(i,j) \in J_n$ sei

$$(5.1.8) \quad z_{i,j} = \frac{iU + jV}{n} \in [U, V].$$

Wir können zu $z_{i,j}$ die Werte $b_{i,j}$ assoziieren und schreiben $(z_{i,j}, b_{i,j})$. Dieses Paar soll Bézierpunkt heißen. Verbindet man die Bézierpunkte durch gerade Linien, so entsteht das

Bézierpolygon. Man beachte, daß der Wert eines Bézierpolynoms im allgemeinen nicht mit der Bézierordinate im Punkt $z_{i,j}$ übereinstimmt. Es gilt lediglich

$$(5.1.9) \quad \bar{\varphi}_n(U) = \phi_n(1,0) = b_{n,0}, \quad \bar{\varphi}_n(V) = \phi_n(0,1) = b_{0,n}.$$

Die Ableitung eines Bézierpolynoms (5.1.7) in Richtung $V-U$ ist

$$(5.1.10) \quad (D_{V-U}\phi_n)(u,v) = n \sum_{(i,j) \in J_{n-1}} (b_{i,j+1} - b_{i+1,j}) B_{i,j}^{n-1}(u,v).$$

Die Bézierordinaten der Ableitung sind also Vielfache der Differenzen der ursprünglichen Bézierordinaten. Aus (5.1.9) und (5.1.10) folgt für die Ableitungen in den Randpunkten

$$(5.1.11) \quad \begin{aligned} (D_{V-U}\phi_n)(U) &= n(b_{n-1,1} - b_{n,0}) \\ (D_{V-U}\phi_n)(V) &= n(b_{0,n} - b_{1,n-1}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, daß wir auf den Intervallen $[U,V]$ und $[V,W]$ mit $V-U = W-V$ die zwei Bézierpolynome ϕ_1 auf $[U,V]$ und ϕ_2 auf $[V,W]$ mit den Bézierordinaten $b_{no}, \dots, b_{on}$ bzw. $c_{no}, \dots, c_{on}$ gegeben haben. Aufgrund von (5.1.9) ist die auf $[U,W]$ abschnittsweise durch ϕ_1 und ϕ_2 definierte Funktion s genau dann stetig, wenn $b_{on} = c_{no}$. Wegen (5.1.11) ist s genau dann stetig differenzierbar, wenn

$$(5.1.12) \quad b_{0,n} = c_{n,0}, \quad b_{0,n} - b_{1,n-1} = c_{n-1,1} - c_{n,0}.$$

5.2 Bézierpolynome über Dreiecken

In zwei Dimensionen können Polynome aus $\mathbb{P}_n$ auf einem Dreieck mit den Ecken U , V und W durch Bernsteinpolynome ausgedrückt werden. Jedes $z \in \mathbb{R}^2$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$(5.2.1) \quad z = uU + vV + wW \quad \text{mit} \quad u + v + w = 1.$$

u, v, w heißen baryzentrische Koordinaten von z bezüglich U , V und W . Ist $z \in \text{con}(U, V, W)$ so gilt

$$(5.2.2) \quad 0 \leq u, v, w \leq 1.$$

u, v und w sind linear als Funktionen von z . Die Bernsteinpolynome vom Grad n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$(5.2.3) \quad B_{i,j,k}^n(u,v,w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad i, j, k \geq 0, \quad i+j+k=n.$$

Wir setzen wieder

$$(5.2.4) \quad J_n := \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq i, j, k \text{ und } i+j+k=n\}.$$

Analog zu (5.1.4) und (5.1.5) ist

$$(5.2.5) \quad 0 \leq B_{i,j,k}^n(u, v, w) \leq 1 \quad \forall (i, j, k) \in J_n, \quad \forall (u, v, w) \in \text{con}(U, V, W).$$

$$(5.2.6) \quad \sum_{(i,j,k) \in J_n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) = 1.$$

$(B_{i,j,k}^n)_{(i,j,k) \in J_n}$ ist eine Basis von $\mathbb{P}_n$. Jedes Polynom

$\bar{\phi}_n(z) = \phi_n(u, v, w)$ aus $\mathbb{P}_n$ hat daher die eindeutige Darstellung

$$(5.2.7) \quad \bar{\phi}_n(z) = \phi_n(u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in J_n} b_{ijk} B_{i,j,k}^n(u, v, w)$$

mit den Bézierordinaten b_{ijk} . (5.2.7) heißt Bézierpolynom.

Für $(i, j, k) \in J_n$ sei

$$(5.2.8) \quad z_{ijk} = \frac{iU + jV + kW}{n} \in \text{con}(U, V, W)$$

Analog zu einer Dimension können die Begriffe Bézierpunkt und Bézierpolygon definiert werden.

Es gilt

$$(5.2.9) \quad \begin{aligned} \bar{\phi}_n(U) &= \phi(1, 0, 0) = b_{n,0,0} \\ \bar{\phi}_n(V) &= \phi(0, 1, 0) = b_{0,n,0} \\ \bar{\phi}_n(W) &= \phi(0, 0, 1) = b_{0,0,n}. \end{aligned}$$

Sind die Bézierordinaten b_{ijk} gegeben, so kann der Wert $\phi_n(u, v, w)$ des Bézierpolynoms in einem Punkt des Dreiecks $\text{con}(U, V, W)$ durch den stabilen Algorithmus von de Casteljau berechnet werden [77]. Die Restriktion eines Bézierpolynoms über einem Dreieck auf eine Kante ergibt ein Bézierpolynom in einer Variablen, d.h. die zu den auf einer Kante liegenden Bézierpunkten assoziierten Bézierordinaten sind die Bézierordinaten der Restriktion. Die Richtungsableitungen bezüglich der drei Kantenrichtungen $U-W$, $V-U$ und $V-W$ ergeben sich durch Differenzenbildung der Bézierordinaten in der jeweiligen Richtung.

(5.2.10)

$$(D_{U-W}\phi_n)(u,v,w) = n \sum_{(i,j,k) \in J_{n-1}} (b_{i+1,j,k}^{-b_{i,j,k+1}}) B_{i,j,k}^{n-1}(u,v,w)$$

$$(D_{V-U}\phi_n)(u,v,w) = n \sum_{(i,j,k) \in J_{n-1}} (b_{i,j+1,k}^{-b_{i+1,j,k}}) B_{i,j,k}^{n-1}(u,v,w)$$

$$(D_{V-W}\phi_n)(u,v,w) = n \sum_{(i,j,k) \in J_{n-1}} (b_{i,j+1,k}^{-b_{i,j,k+1}}) B_{i,j,k}^{n-1}(u,v,w).$$

Aus (5.2.10) und (5.2.9) folgt für die gemischten Ableitungen in einem Eckpunkt

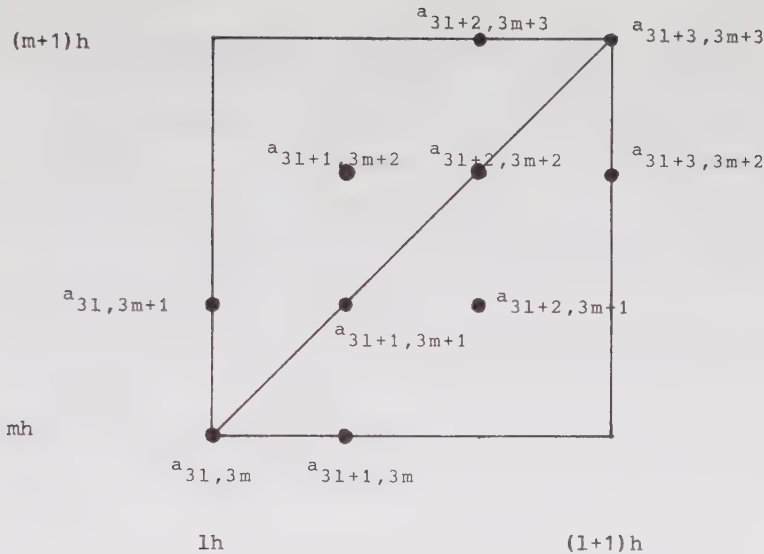
(5.2.11)

$$(D_{V-U} D_{U-W} \bar{\phi}_n)(U) = n(n-1) (b_{n-1,1,0}^{+b_{n-1,0,1}} b_{n-2,1,1}^{-b_{n,0,0}}).$$

5.3. Interpolation in $S_3^1(\Delta^{(1)})$

Wir führen auf $I \times I$ für $N \in \mathbb{N}$ eine Triangulation vom Typ 1 mit dem Knotenabstand $h = \frac{1}{N}$ ein. Auf jedem der $2N^2$ Dreiecke wird ein Spline aus $(S_3^1(\Delta_{N,N}^{(1)}))_h$ durch ein Polynom aus $\mathbb{P}_3$ dargestellt. Aufgrund der Stetigkeit des Splines haben die Polynome über zwei Dreiecken mit einer gemeinsamen Kante auf ihr die gleichen Bézierordinaten.

Jedes $s \in (S_3^0(\Delta_{N,N}^{(1)}))_h$ ist somit eindeutig durch die Bézierordinaten $(a_{1,m})_{1,m=0,\dots,3N}$ gegeben, die zu den Bézierpunkten $\xi_{1,m} = \frac{1}{3}(1h, mh)$, $1, m = 0, \dots, 3N$ gehören. Damit s stetig differenzierbar wird, müssen die $(a_{1,m})$ noch weitere Bedingungen erfüllen.



Wir wollen erreichen, daß die Ableitung $hD_{1,0}$ über die Kante $\Gamma_{1,m} := \{(x, mh+x-lh) : x \in [lh, (1+1)h]\}$ stetig wird. Im Dreieck $\text{con}((lh, mh), ((1+1)h, (m+1)h), (lh, (m+1)h))$ hat $hD_{1,0}^s$ auf der Kante $\Gamma_{1,m}$ wegen (5.2.10) die Bézierordinaten

$(3a_{3l+i, 3m+i} - 3a_{3l+i-1, 3m+i})_{i=1,2,3}$ und im Dreieck $\text{con}((lh, mh), ((1+1)h, mh), ((1+1)h, (m+1)h))$ die Bézierordinaten $(3a_{3l+i, 3m+i-1} - 3a_{3l+i-1, 3m+i-1})_{i=1,2,3}$. Daher ist s genau dann über $\Gamma_{1,m}$ stetig differenzierbar, wenn

$$(5.3.1a) \quad a_{3l+i, 3m+i-1} + a_{3l+i-1, 3m+i} - a_{3l+i-1, 3m+i-1} - a_{3l+i, 3m+i} = 0 \\ i=1,2,3, \quad l, m=0, \dots, N-1.$$

Ebenso ist die C^1 -Bedingung von s über die Kante $[lh, (1+1)h] \times \{mh\}$ äquivalent mit

$$(5.3.1b) \quad a_{3l+i, 3m+1} + a_{3l+i-1, 3m-1} - a_{3l+i-1, 3m} - a_{3l+i, 3m} = 0 \\ i=1,2,3, \quad l=0, \dots, N-1, \quad m=1, \dots, N-1.$$

Für $\{lh\} \times [mh, (m+1)h]$ ergibt sich

$$(5.3.1c) \quad a_{3l+1,3m+i} + a_{3l-1,3m+i-1} - a_{3l,3m+i-1} - a_{3l,3m+i} = 0 \\ i=1,2,3, \quad l=1,\dots,N-1, \quad m=0,\dots,N-1.$$

Im folgenden wollen wir zu einer Funktion f den interpolierenden Spline s konstruieren, d.h. seine Bézierordinaten $(a_{1,m})_{1,m=0,\dots,3N}$ bestimmen. Diese ergeben sich einerseits durch Übereinstimmung von f und s und gewissen Ableitungen in einer Auswahl von Knotenpunkten, andererseits legen die Bedingungen (5.3.1) eine Bézierordinate fest, falls die passenden drei anderen bereits gegeben sind. Unsere Methode wird alle $(a_{1,m})$ sukzessive durch Daten oder durch (5.3.1) festlegen und von keiner Auflösung eines linearen Gleichungssystems Gebrauch machen. Die Interpolationsbedingungen werden wir am Schluß in (5.3.10) zusammenstellen.

1. Zunächst wollen wir in $[0,h]^2$ die Bézierordinaten a_{ij} , $i=0,\dots,3, j=0,1$ festlegen.

Wir fordern

$$(5.3.2a) \quad s(0,0) = f(0,0), \\ \text{weshalb nach (5.2.9)}$$

$$(5.3.3a) \quad a_{00} = f(0,0) \\ \text{ist. Die Bedingungen}$$

$$(5.3.2b) \quad D_{1,0}s(0,0) = D_{1,0}f(0,0), \quad D_{0,1}s(0,0) = D_{0,1}f(0,0) \\ \text{ergeben nach (5.1.11)}$$

$$(5.3.3b) \quad a_{10} = a_{00} + D_{1,0}f(0,0)h/3, \quad a_{01} = a_{00} + D_{0,1}f(0,0)h/3. \\ (5.3.1a) \text{ führt zu}$$

$$(5.3.3c) \quad a_{11} = a_{10} + a_{01} - a_{00}. \\ \text{Aus den Forderungen}$$

$$(5.3.2c) \quad s(h,0) = f(h,0), \quad D_{1,0}s(h,0) = D_{1,0}f(h,0), \\ \lim_{x \rightarrow h-, y \rightarrow 0+} D_{1,1}s(x,y) = D_{1,1}f(h,0) \\ \text{fließt wegen (5.1.11) und (5.2.11)}$$

$$(5.3.3d) \quad a_{30} = f(h,0), \quad a_{20} = a_{30} - D_{1,0}f(h,0)h/3, \\ a_{31} = a_{30} - D_{0,1}f(h,0)h/3, \quad a_{21} = a_{20} + a_{31} - a_{30} - \\ - D_{1,1}f(h,0)h^2/6.$$

2. Wir berechnen für $m=1, \dots, N$ die Werte a_{ij} , $i=0, \dots, 3$, $j=3m-1, 3m$. Dabei nehmen wir an, daß für $i=0, \dots, 3$ und $0 \leq j \leq 3m-2$ die Bézierordinaten bereits bestimmt wurden.

Aus

$$(5.3.4a) \quad \begin{aligned} s(0, mh) &= f(0, mh), \quad D_{1,0}s(0, mh) = D_{1,0}f(0, mh), \\ D_{0,1}s(0, mh) &= D_{0,1}f(0, mh), \quad \lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow mh-} D_{1,1}s(x, y) \\ &= D_{1,1}f(0, mh) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(5.3.5a) \quad \begin{aligned} a_{0,3m} &= f(0, mh), \quad a_{0,3m-1} = a_{0,3m} - D_{0,1}f(0, mh)h/3, \\ a_{1,3m} &= a_{0,3m} + D_{1,0}f(0, mh)h/3, \\ a_{1,3m-1} &= a_{0,3m-1} + a_{1,3m} - a_{0,3m} - D_{1,1}f(0, mh)h^2/6. \end{aligned}$$

$$(5.3.4b) \quad s(h, mh) = f(h, mh), \quad D_{1,0}s(h, mh) = D_{1,0}f(h, mh)$$

induziert

$$(5.3.5b) \quad a_{3,3m} = f(h, mh), \quad a_{2,3m} = a_{3,3m} - D_{1,0}f(h, mh)h^2/6.$$

Nach (5.3.1) ist schließlich

$$(5.3.5c) \quad \begin{aligned} a_{2,3m-1} &= a_{1,3m-1} + a_{2,3m-2} - a_{1,3m-2}, \\ a_{3,3m-1} &= a_{3,3m} + a_{2,3m-1} - a_{2,3m}. \end{aligned}$$

Ist $m < N$, so können die Ordinaten $a_{i,3m+1}$, $i=0, \dots, 3$ berechnet werden. Wegen (5.1.12) ist

$$(5.3.5d) \quad a_{0,3m+1} = 2a_{0,3m} - a_{0,3m-1}.$$

(5.3.1b) ergibt

$$(5.3.5e) \quad a_{i,3m+1} = a_{i-1,3m} + a_{i,3m} - a_{i-1,3m-1}, \quad i=1, 2, 3.$$

Man beachte, daß sich $a_{3,3m+1}$ auch aus (5.1.12) zu $a_{3,3m+1} = 2a_{3,3m} - a_{3,3m-1}$ berechnen läßt. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß dies mit der vorigen Bestimmung verträglich ist.

3. Für $l=1, \dots, N-1$ können wir nun die Bézierordinaten a_{ij} , $i=3l+1, \dots, 3l+3$, $j=0, \dots, 3$ berechnen. Die Werte a_{ij} seien für $i \leq 3l$ und $j = 0, \dots, 3$ bereits gegeben.

Wegen (5.1.12) ist

$$(5.3.7a) \quad a_{3l+1,o} = 2a_{3l,o} - a_{3l-1,o}.$$

(5.3.1c) ergibt

$$(5.3.7b) \quad a_{3l+1,i} = a_{3l,i} + a_{3l,i-1} - a_{3l-1,i-1}, \quad i=1,2,3.$$

Man beachte, daß für $a_{3l+1,3}$ wieder zwei verträgliche Berechnungsformeln existieren. Die Forderungen

$$\begin{aligned} (5.3.6a) \quad s((l+1)h,0) &= f((l+1)h,0), \quad D_{1,o} s((l+1)h,0) = \\ &= D_{1,o}((l+1)h,0), \quad D_{o,1} s((l+1)h,0) = \\ &= D_{o,1} f((l+1)h,0), \quad \lim_{x \rightarrow (l+1)h-, y \rightarrow o+} D_{1,1} s(x,y) = \\ &= D_{1,1} f((l+1)h,0) \end{aligned}$$

ergeben

$$\begin{aligned} (5.3.7c) \quad a_{3l+3,o} &= f((l+1)h,0), \quad a_{3l+2,o} = a_{3l+3,o} - \\ &- D_{1,o} f((l+1)h,0)h/3, \quad a_{3l+3,1} = a_{3l+3,o} + \\ &+ D_{o,1} f((l+1)h,0)h/3, \quad a_{3l+2,1} = a_{3l+3,1} + \\ &+ a_{3l+2,o} - a_{3l+3,o} - D_{1,1} f((l+1)h,0)h^2/6. \end{aligned}$$

Die Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} (5.3.6b) \quad s((l+1)h,h) &= f((l+1)h,h), \quad D_{1,o} s((l+1)h,h) = \\ &= D_{1,o} f((l+1)h,h) \end{aligned}$$

führen zu

$$\begin{aligned} (5.3.7d) \quad a_{3l+3,3} &= f((l+1)h,h), \quad a_{3l+2,3} = a_{3l+3,3} - \\ &- D_{1,o} f((l+1)h,h)h^2/6. \end{aligned}$$

Aus (5.3.1a) fließt

$$\begin{aligned} (5.3.7e) \quad a_{3l+2,2} &= a_{3l+1,2} + a_{3l+2,1} - a_{3l+1,1}, \\ a_{3l+3,2} &= a_{3l+3,3} + a_{3l+2,2} - a_{3l+2,3}. \end{aligned}$$

4. Wir haben nun alle Bézierordinaten in

$I \times [0,h] \cup [0,h] \times I$ festgelegt. Für $l, m=1, \dots, N-1$ sollen die Ordinaten in $[lh, (l+1)h] \times [mh, (m+1)h]$ bestimmt werden. Die Werte a_{ij} seien für $i \leq 3l$, $j \leq 3m+3$ und für

$j \leq 3m$, $i \leq 3l+3$ gegeben.

(5.3.1b) ergibt

$$(5.3.9a) \quad a_{3l+i, 3m+1} = a_{3l+i-1, 3m} + a_{3l+i, 3m} - a_{3l+i-1, 3m-1}, \\ i=1, 2, 3.$$

Ebenso fließt aus (5.3.1c)

$$(5.3.9b) \quad a_{3l+1, 3m+i} = a_{3l, 3m+i} + a_{3l, 3m+i-1} - a_{3l-1, 3m+i-1}, \\ i=1, 2, 3.$$

Man beachte wieder, daß alle Möglichkeiten $a_{3l+1, 3m+1}$, $a_{3l+3, 3m+1}$ und $a_{3l+1, 3m+3}$ zu berechnen, miteinander verträglich sind. Die Interpolationsforderungen

$$(5.3.8) \quad s((l+1)h, (m+1)h) = f((l+1)h, (m+1)h), \\ D_{1,0} s((l+1)h, (m+1)h) = D_{1,0} f((l+1)h, (m+1)h)$$

führen zu

$$(5.3.9c) \quad a_{3l+3, 3m+3} = f((l+1)h, (m+1)h), \\ a_{3l+2, 3m+3} = a_{3l+3, 3m+3} - D_{1,0} f((l+1)h, (m+1)h)h/3.$$

(5.3.1a) ergibt schließlich

$$(5.3.9d) \quad a_{3l+2, 3m+2} = a_{3l+1, 3m+2} + a_{3l+2, 3m+1} - a_{3l+1, 3m+1}, \\ a_{3l+3, 3m+2} = a_{3l+3, 3m+3} + a_{3l+2, 3m+2} - a_{3l+2, 3m+3}.$$

Somit sind nach Durchführung der Schritte 1 bis 4 alle Bézierordinaten und damit der interpolierende Spline s festgelegt.

Wir wollen noch einmal alle Interpolationsbedingungen zusammenstellen.

$$(5.3.10a) \quad s(ih, jh) = f(ih, jh), \quad i, j=0, \dots, N$$

$$(5.3.10b) \quad D_{1,0} s(ih, jh) = D_{1,0} f(ih, jh), \quad i, j=0, \dots, N$$

$$(5.3.10c) \quad D_{0,1} s(ih, 0) = D_{0,1} f(ih, 0), \quad i=0, \dots, N$$

$$D_{0,1} s(0, jh) = D_{0,1} f(0, jh), \quad j=1, \dots, N$$

$$(5.3.10d) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow ih- \\ y \rightarrow 0+}} D_{1,1} s(x,y) = D_{1,1} f(ih,0), \quad i=1, \dots, N$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow jh-}} D_{1,1} s(x,y) = D_{1,1} f(0,jh), \quad j=1, \dots, N$$

Die Anzahl der Interpolationsbedingungen ist $2N^2+8N+3$ und damit nach (2.1.1) gleich der Dimension von $S_3^1(\Delta_{N,N}^{(1)})$. Es ist möglich, durch Betrachtung von Bézierordinaten die Dimension von Splineräumen auf $\Delta^{(1)}$ zu bestimmen [77,78].

Bemerkung: Ähnliche Interpolationsverfahren lassen sich auch für die Splineräume $(S_n^1(\Delta_{N,N}^{(1)}))_h$ mit $n \geq 4$ angeben, wobei bei mehr Interpolationsbedingungen angegeben werden müssen. Für Glattheiten ≥ 2 können auch Übergangsbedingungen formuliert werden (vgl. [77]). Die darauf aufbauenden Verfahren sind jedoch instabil.

5.4 Numerische Ergebnisse

Das Verfahren wurde mit mehreren Funktionen f durchgeführt. Für ein $N \in \mathbb{N}$ sei s_N der interpolierende Spline zu f und

$$e(N) = \|f - s_N\|_{I \times I}.$$

Für zwei verschiedene Werte $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ kann die Konvergenzordnung α durch

$$\alpha = \frac{\log(e(N_1)/e(N_2))}{\log(N_2/N_1)}$$

numerisch bestimmt werden. Wir wählen die Schrittweiten $N_v = 8 + 4v$. $\alpha = \alpha_v$ wird dann mit N_v und N_{v-1} berechnet.

Beispiel 1:

$$f(x,y) = x^2 y^2.$$

N	e(N)	α
8	0.259 E-3	2.82
12	0.798 E-4	2.91
16	0.343 E-4	2.94
20	0.178 E-4	2.95
24	0.103 E-4	2.96
28	0.655 E-5	2.97

Beispiel 2:

$$f(x,y) = e^{xy}$$

N	e(N)	α
8	0.198 E-3	2.82
12	0.596 E-4	2.97
16	0.251 E-4	3.00
20	0.128 E-4	3.02
24	0.738 E-5	3.02
28	0.463 E-5	3.02

Beispiel 3:

$$f(x,y) = e^x y$$

N	e(N)	α
8	0.330 E-4	2.62
12	0.106 E-4	2.80
16	0.464 E-5	2.87
20	0.243 E-5	2.90
24	0.143 E-5	2.92
28	0.908 E-6	2.93

Beispiel 4:

$$f(x,y) = e^x$$

N	e(N)	α
8	0.129 E-5	3.92
12	0.259 E-6	3.95
16	0.829 E-7	3.97
20	0.342 E-7	3.97
24	0.165 E-7	3.98
28	0.895 E-8	3.98

Beispiel 5:

$$f(x,y) = 1/(y+1)$$

N	e(N)	α
8	0.914 E-5	3.64
12	0.197 E-5	3.78
16	0.654 E-6	3.84
20	0.275 E-6	3.88
24	0.135 E-6	3.90
28	0.740 E-7	3.91

Beispiel 6:

$$f(x,y) = \sin(x-y)$$

N	e(N)	α
8	0.156 E-5	3.79
12	0.318 E-6	3.92
16	0.102 E-6	3.95
20	0.422 E-7	3.96
24	0.204 E-7	3.97
28	0.111 E-7	3.98

Man sieht, daß in den Beispielen 4,5 und 6 die numerische Konvergenzordnung 4 ist, während sie in den anderen Beispielen 3 ist. Dies bestätigt die in Abschnitt 2.3 und Kapitel 4 gewonnenen Aussagen über das Konvergenzverhalten.

LITERATUR

1. Adams, R.A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.
2. Aubin, J.-P.: Approximation of elliptic boundary-value problems. Wiley, New York (1972).
3. Barnhill, R.E., Böhm, W.(Eds.): Surfaces in computer aided geometric design. North Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1982).
4. Barnhill, R.E., Farin, G.: C^1 quintic interpolation over triangles: two explicit representations. International journal for numerical methods in engineering 17, 1763-1778 (1981).
5. Barrar, R.B., Loeb, H.L.: Some remarks on the exact controlled approximation order of bivariate splines on a diagonal mesh. J. of Approximation Theory 42, 257-265 (1984).
6. Barrar, R.B., Loeb, H.L.: A necessary condition for controlled approximation. Manuskript (1984).
7. Böhm, W.: Inserting new knots into B-spline curves. CAD 12, 199-201 (1980).
8. Böhm, W.: Generating the Bézier points of B-spline curves and surfaces. CAD 13, 365-366 (1981).
9. Böhm, W.: Subdividing multivariate splines. CAD 15, 345-352 (1983).
10. Böhm, W.: Generating the Bézier points of triangular splines. In [3], 77-92 (1982).
11. Böhm, W.: The de Boor algorithm for triangular splines. In [3], 109-120 (1982).
12. Böhm, W.: Efficient evaluation of splines. Computing 33, 171-177 (1984).
13. de Boor, C.: A practical guide to splines. Springer-Verlag, New York (1978).
14. de Boor, C.: Topics in multivariate approximation theory. MRC TSR 2379 (1982) und in: "Topics in numerical analysis", P.R. Turner (Ed.), Springer Lecture Notes in Mathematics 965, 39-78 (1982).

15. de Boor, C., DeVore, R.: Approximation by smooth multivariate splines. Trans. Amer. Math. Soc. 276, 775-788 (1983).
16. de Boor, C., DeVore, R.: Partitions of unity and approximation. MRC TSR 2704 (1984).
17. de Boor, C., DeVore, R., Höllig, K.: Approximation order from smooth bivariate pp functions. In [38], 353-357 (1983).
18. de Boor, C., Höllig, K.: Recurrence relations for multivariate B-splines. Proc. Amer. Math. Soc. 85, 397-400 (1982).
19. de Boor, C., Höllig, K.: B-splines from parallel-epipeds. Journal d'Analyse mathématique XIII, 99-115 (1982/83).
20. de Boor, C., Höllig, K.: Approximation order from bivariate C^1 -cubics: a counterexample. Proc. Amer. Math. Soc. 87, 649-655 (1983).
21. de Boor, C., Höllig, K.: Bivariate box splines and smooth pp functions on a three-direction mesh. J. of Comp. and Applied Math. 9, 13-28 (1983).
22. de Boor, C., Höllig, K., Riemenschneider, S.: Bivariate cardinal interpolation by splines on a three-direction mesh. MRC TSR 2485 (1983).
23. de Boor, C., Höllig, K., Riemenschneider, S.: Convergence of bivariate cardinal interpolation. MRC TSR 2686 (1984).
24. de Boor, C., Jia, R.-Q.: Controlled approximation and a characterization of the local approximation order. MRC TSR 2763 (1984).
25. Bramble, J.H., Hilbert, S.R.: Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation. SIAM J. Numer. Anal. 7, 112-124 (1970).
26. Bramble, J.H., Hilbert, S.R.: Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. Numerische Mathematik 16, 362-369 (1971).
27. Bramble, J.H., Zlamal, M.: Triangular elements in the finite element method. Math. of Comp. 24, 809-819 (1970).
28. Cavaretta, A., Micchelli, Ch., Sharma, A.: Multivariate interpolation and the Radon transform. Math. Zeitschrift 174, 263-279 (1980).

29. Cavaretta, A., Micchelli, Ch., Sharma, A.: Multivariate interpolation and the Radon transform. II. Some further examples. In: Quantitative Approximation, DeVore, Scherer (Eds.), 49-62 (1980).
30. Cavaretta, A., Goodman, T.N.T., Micchelli, Ch., Sharma, A.: Multivariate interpolation and the Radon transform, part III: Lagrange representation. Second Edmonton conference on approximation theory. CMS conference proceedings. Volume 3, 37-50 (1982).
31. Cheney, E.W.: On best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones. In [38], 1-26 (1983).
32. Cheng, Geng-zhe, Davis, Ph.: The convexity of Bernstein polynomials over triangles. J. of Approx. Theory 40, 11-28 (1984).
33. Chui, Ch., Hu, Y.-S.: Geometric properties of certain bivariate splines. In [38], 407-412 (1983).
34. Chui, Ch., Lai, M.J.: On bivariate vertex splines. C.A.T. Report 74, Texas A&M University (1985).
35. Chui, Ch., Schumaker, L.L.: On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions. I. Rectangles. In [124], 69-80 (1982).
36. Chui, Ch., Schumaker, L., Wang, R.-H.: On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions II. Type - 1 triangulations. Second Edmonton conference on approx. theory. CMS conference proceedings. Volume 3, 51-66 (1982).
37. Chui, Ch., Schumaker, L., Wang, R.-H.: On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions III. Type - 2 triangulations. Second Edmonton conference on approx. theory. CMS conference proceedings. Volume 3, 67-80 (1982).
38. Chui, Ch., Schumaker, L., Ward, J.M. (Eds.): Approximation Theory IV. Academic Press (1983).
39. Chui, Ch., Wang, R.-H.: On smooth multivariate spline functions. C.A.T. Report 3, Texas A&M University (1981).
40. Chui, Ch., Wang, R.-H.: Bivariate cubic B-splines relative to cross cut triangulations. C.A.T. Report 4, Texas A&M University (1981).
41. Chui, Ch., Wang, R.-H.: Multivariate B-splines on triangulated rectangles. J. of Math. Anal. and Applications 92, 533-551 (1983).

42. Chui, Ch., Wang, R.-H.: On a bivariate B-spline basis. C.A.T. Report 7, Texas A&M University (1981).
43. Chui, Ch., Wang, R.-H.: Multivariate spline spaces. J. of Math. Anal. and Applications 94, 197-221 (1983).
44. Chui, Ch., Wang, R.-H.: Spaces of bivariate cubic and quartic splines on type-1 triangulations. J. of Math. Anal. and Applications 101, 540-554 (1984).
45. Chung, K.C., Yao, T.H.: On lattices admitting unique Lagrange interpolation. SIAM J. Numer. Anal. 14, 735-743 (1977).
46. Ciarlet, Ph.: The finite element method for elliptic problems. North-Holland (1978).
47. Ciarlet, Ph., Raviart, P.: General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. Arch. Rational Mech. Anal. 46, 177-199 (1972).
48. Cohen, E., Lyche, T., Riesenfeld, R.: Discrete box splines and refinement algorithms. Research Report, Institute of Informatics, Univ. of Oslo No. 80 (1983).
49. Curry, H.B., Schoenberg, I.J.: On Polya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits. J. Analyse Math. 17, 71-107 (1966).
50. Dahmen, W.: Polynomials as linear combinations of multivariate B-splines. Math. Z. 169, 93-98 (1979).
51. Dahmen, W.: On multivariate B-splines. SIAM J. Numer. Anal. 17, 179-191 (1980).
52. Dahmen, W.: Approximation by linear combinations of multivariate B-splines. J. Approximation Theory 31, 299-324 (1981).
53. Dahmen, W.: Multivariate B-splines - ein neuer Ansatz im Rahmen der konstruktiven Approximationstheorie, Habilitationsschrift, Bonn (1980/81).
54. Dahmen, W.: Subdivision algorithms converge quadratically. SFB 72, preprint no. 710, Bonn (1985).
55. Dahmen, W., DeVore, R., Scherer, K.: Multi-dimensional spline approximation. SIAM J. Numer. Anal. 17, 380-402 (1980).
56. Dahmen, W., Dyn, N., Levin, D.: On the convergence rates of subdivision algorithms for box splines. SFB 72, preprint no. 694, Bonn (1984).

57. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Recent progress in multivariate splines. In [38], 27-122 (1983).
58. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Multivariate splines - a new constructive approach. In [3], 191-215 (1983).
59. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Numerical algorithms for least squares approximation by multivariate B-splines. In: Numerical Methods of Approximation Theory. Collatz, L., Meinardus, G., Werner, H. (Ed.), Birkhäuser, Basel, 85-114 (1981).
60. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Computation of inner products of multivariate B-splines. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 3, 367-375 (1981).
61. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the linear independence of multivariate B-splines. I. Triangulations of simplices. SIAM J. Numer. Anal. 19, 993-1012 (1982).
62. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the linear independence of multivariate B-splines. II. Complete configurations. SFB 72, preprint no. 460, Bonn (1981).
63. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Some remarks on multivariate B-splines. In [124], 81-87 (1982).
64. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Translates of multivariate splines. Linear Algebra and its Applications 52, 217-234 (1983).
65. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the approximation order from certain multivariate spline spaces. J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 233-246 (1984).
66. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Some results on box splines. Bull. (New Series) Am. Math. Soc. 11, 147-150 (1984).
67. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the optimal approximation rates for criss cross finite element spaces. J. Comput. Applied Math. 10, 255-273 (1984).
68. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the local linear independence of translates of a box spline. SFB 72, preprint no. 627, Bonn (1983).
69. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: On the solution of certain systems of partial difference equations and linear dependence of translates of box splines. SFB 72, preprint no. 649, Bonn (1984).
70. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Subdivision algorithms for the generation of box spline surfaces. Computer Aided Geometric Design 1, 115-129 (1984).

71. Dahmen, W., Micchelli, Ch.: Line average algorithm: a method for the computer generation of smooth surfaces. IBM research report RC 10833 (48501) (1984).
72. Davis, Ph.J.: Interpolation and approximation. Dover (1975).
73. Diliberto, S.P., Strauss, E.G.: On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables. Pacific J. Math. 1, 195-210 (1951).
74. Dupont, T., Scott, R.: Constructive polynomial approximation in Sobolev spaces. In: Advances in Numerical Analysis, de Boor, Golub (Ed.), 31-44 (1978).
75. Dupont, T., Scott, R.: Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. Math. Comp. 34, 441-463 (1980).
76. Duran, R.: On polynomial approximation in Sobolev spaces. SIAM J. Numer. Anal. 20, 985-988 (1983).
77. Farin, G.: Subsplines über Dreiecken. Dissertation, Braunschweig (1979).
78. Farin, G.: Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r polynomials. TR/91, Dept. of Math., Brunel University, Uxbridge, Middlesex, England (1980).
79. Farin, G.: A construction for visual C^1 continuity of polynomial surface patches. Manuskript.
80. Fix, G., Strang, G.: Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. Studies in appl. math. 48, 265-273 (1969).
81. Frederickson, P.O.: Triangular spline interpolation. Mathematics report 6-70, Lakehead (1970).
82. Frederickson, P.O.: Quasi-interpolation, extrapolation, and approximation on the plane. In: Proc. Manitoba Conference Numerical Math., Winnipeg, 159-167 (1971).
83. Gasca, M., Maeztu, J.I.: On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$. Num. Math. 39, 1-14 (1982).
84. Gasca, M., Ramirez, V.: Interpolation systems in $\mathbb{R}^k$. J. Approximation Theory 42, 36-51 (1984).
85. Goldman, R.N.: Using degenerate Bézier triangles and tetrahedra to subdivide Bézier curves. CAD 14, 307-311 (1982).

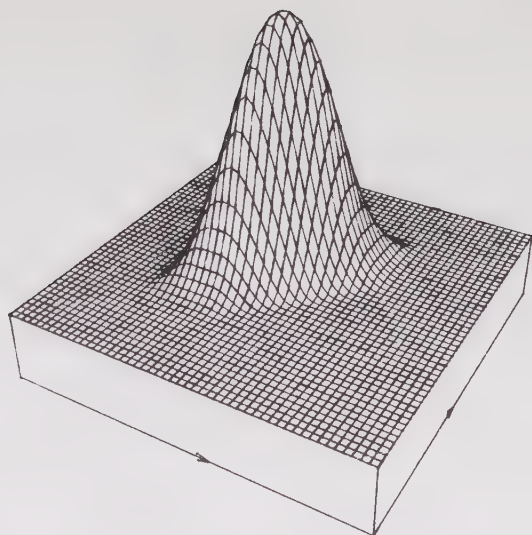
86. Goldman, R.N.: Subdivision algorithms for Bézier triangles. CAD 15, 159-166 (1983).
87. Goodman, T.N.T.: Interpolation in minimum semi-norm and multivariate B-splines. J. Approx. Theory 37, 212-223 (1983).
88. Goodman, T.N.T., Lee, S.L.: Spline approximation operators of Bernstein-Schoenberg type in one and two variables. J. Approx. Theory 33, 248-263 (1981).
89. Guglielmo, F.Di: Construction d'approximations des espaces de Sobolev sur des reseaux en simplexes. Calcolo 6, 279-331 (1969).
90. Guglielmo, F.Di: Méthode des éléments finis: Une famille d'approximations des espaces de Sobolev par les translatés de p fonctions. Calcolo 7, 185-233 (1970).
91. Guglielmo, F.Di: Resolution approchée de problèmes aux limites elliptiques par des schémas aux éléments finis a plusieurs fonctions arbitraires. Calcolo 8, 185-213 (1971).
92. Hakopian, Hakop: Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type. J. Approx. Theory 34, 286-305 (1982).
93. Hakopian, Hakop: Multivariate spline functions, B-spline basis and polynomial interpolations. SIAM J. Numer. Anal. 19, 510-517 (1982).
94. Hakopian, Hakop: Les différences divisées de plusieurs variables et les interpolations multidimensionnelles de types lagrangien et hermitian. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, 453-456 (1981).
95. Heindl, G.: Interpolation and approximation by piecewise quadratic C^1 -functions of two variables. In [123], 146-161 (1979).
96. Höllig, K.: A remark on multivariate B-splines. J. Approx. Theory 33, 119-125 (1981).
97. Höllig, K.: Multivariate splines. SIAM J. Numer. Anal. 19, 1013-1031 (1982).
98. Jia, R.-q.: Approximation by smooth bivariate splines on a three-direction mesh. MRC TSR 2494 und in [38], 539-546 (1983).
99. Jia, R.-q.: Linear independence of translates of a box spline. J. Approx. Theory 40, 158-160 (1984).

100. Jia, R.-q.: On the controlled approximation order from certain spaces of smooth bivariate splines. MRC TSR 2696 (1984).
101. Jia, R.-q.: Local linear independence of the translates of a box spline. MRC TSR 2671 (1984).
102. Jia, R.-q.: A counterexample to a result of Strang and Fix concerning controlled approximation. MRC TSR 2743 (1984).
103. Jia, R.-q.: Approximation order from certain spaces of smooth bivariate splines on a three-direction mesh. MRC TSR 2749 (1984).
104. Kergin, P.: A natural interpolation of C^k functions. J. Approx. Theory 29, 278-293 (1980).
105. Kochevar, P.D.: A multidimensional analogue of the variation diminishing spline approximation method. Master thesis, Utah (1982).
106. Kochevar, P.D.: An application of multivariate B-splines to computer-aided geometric design. Rocky Mountain J. of Math. 14, 159-175 (1984).
107. Light, W.A., Cheney, E.W.: Some best-approximation theorems in tensor-product spaces. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89, 385-390 (1981).
108. Light, W.A., Cheney, E.W.: The characterization of best approximations in tensor-product spaces. Analysis 4, 1-26 (1984).
109. Mehaute, A. Le: Taylor interpolation of order n at the vertices of a triangle. Applications for hermite interpolation and finite elements. In: Approximation Theory and Applications, Ziegler (Ed.), 171-185 (1981).
110. Micchelli, Ch.: A constructive approach to Kergin interpolation in $\mathbb{R}^k$: Multivariate B-splines and Lagrange interpolation. Rocky Mountain J. of Math. 10, 485-497 (1980).
111. Micchelli, Ch., Milman, P.: A formula for Kergin interpolation in $\mathbb{R}^k$. J. Approx. Theory 29, 294-296 (1980).
112. Michlin, S.G.: Approximation auf dem kubischen Gitter. Mathematische Reihe Bd. 59, Birkhäuser (1976).
113. Morgan, J., Scott, R.: A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$. Math. Comput. 29, 736-740 (1975).

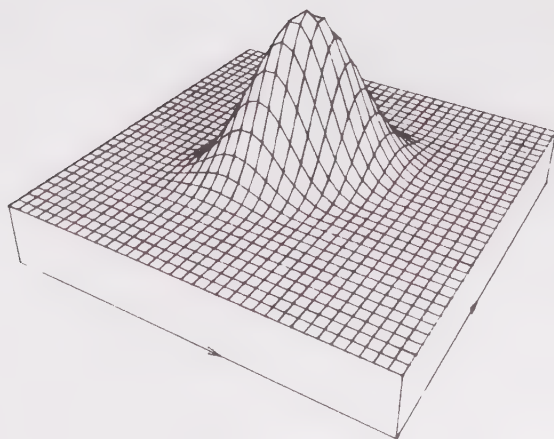
114. Morgan, J., Scott, R.: The dimension of the space of C^1 piecewise polynomials. Manuskript (1976).
115. Munteanu, M.J., Schumaker, L.L.: Direct and inverse theorems for multidimensional spline approximation. Indiana Univ. Math. J. 23, 461-470 (1973).
116. Nicolaidis, R.A.: On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation. SIAM J. Numer. Anal. 9, 435-445 (1972).
117. Powell, M.J.D.: Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting. In: Software for Numerical Analysis, Evans, D.J. (Ed.), Academic Press, 253-272 (1974).
118. Powell, M.J.D., Sabin, M.A.: Piecewise quadratic approximations on triangles. ACM Trans. Math. Software 3, 316-325 (1977).
119. Prautzsch, H.: Unterteilungsalgorithmen für multivariate Splines - ein geometrischer Zugang. Dissertation, Braunschweig (1984).
120. Rudin, W.: Functional Analysis. New York, Mc Graw-Hill (1973).
121. Sablonniere, P.: Bases de Bernstein et approximants splines. Thèse, Lille (1982).
122. Smith, K.T.: Formulas to represent functions by their derivatives. Math. Ann. 188, 53-77 (1970).
123. Schempp, W., Zeller, K. (Eds.): Multivariate Approximation Theory. ISNM 51, Birkhäuser, Basel (1979).
124. Schempp, W., Zeller, K. (Eds.): Multivariate Approximation Theory II. ISNM 61, Birkhäuser, Basel (1982).
125. Schultz, M.H.: Spline Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
126. Schultz, M.H., Varga, R.S.: L-splines. Numer. Math. 10, 345-369 (1967).
127. Schumaker, L.L.: Spline functions: Basic Theory. John Wiley (1981).
128. Schumaker, L.L.: On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables. In [123], 396-412 (1979).
129. Schumaker, L.L.: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials. Rocky Mountain J. of Math. 14, 251-264 (1984).

130. Strang, G.: Piecewise polynomials and the finite element method. Bull. Amer. Math. Soc. 79, 1128-1137 (1973).
131. Strang, G.: The dimension of piecewise polynomial spaces, and one-sided approximation. Lecture Notes in Mathematics 363, Springer, 144-152 (1974).
132. Strang, G.: The finite element method and approximation theory. In: Numerical solution of partial differential equations, SYNPADE 1970, University of Maryland, B. Hubbard (Ed.), 547-583 (1970).
133. Strang, G., Fix, G.: A Fourier analysis of the finite element variational method. C.I.M.E. II, Circolo Erice, 1971, Constructive aspects of functional analysis, G. Geymonat (Ed.), 793-840 (1973).
134. Whitney, H.: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 63-89 (1934).
135. Whitney, H.: Functions differentiable on the boundaries of regions. Annals of Math. 35, 482-485 (1934).
136. Yosida, K.: Functional Analysis. Springer, sixth edition (1980).
137. Zwart, Ph.: Multivariate splines with nondegenerate partitions. SIAM J. Numer. Anal. 10, 665-673 (1973).

Anhang



$$B^1 = \chi_1 * B_{1,1,1} \in S_3^1(\Delta^{(1)}) \quad (\text{Seite 48})$$



$$B_{2,2,2} \in S_4^2(\Delta^{(1)}) \quad (\text{Seite 47})$$

L e b e n s l a u f

Lothar Bamberger	geboren am 22.4.1957 in Dillingen/Donau als Sohn des Bau- ingenieurs Erich Bamberger und seiner Ehefrau Elsa
Schule	Von September 1963 bis August 1967 Volksschule an der Forellenstraße in München September 1967 bis Juni 1976 Maria-Theresia-Gymnasium München
Studium	November 1976 bis Februar 1982 Studium der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplom in Mathematik Seit März 1982 Doktorand September 1982 - September 1983 Forschungsaufenthalt und teaching assistant am Center for Approximation Theory der Texas A&M University, College Station, Texas, USA
1982 - 1985	Stipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes

